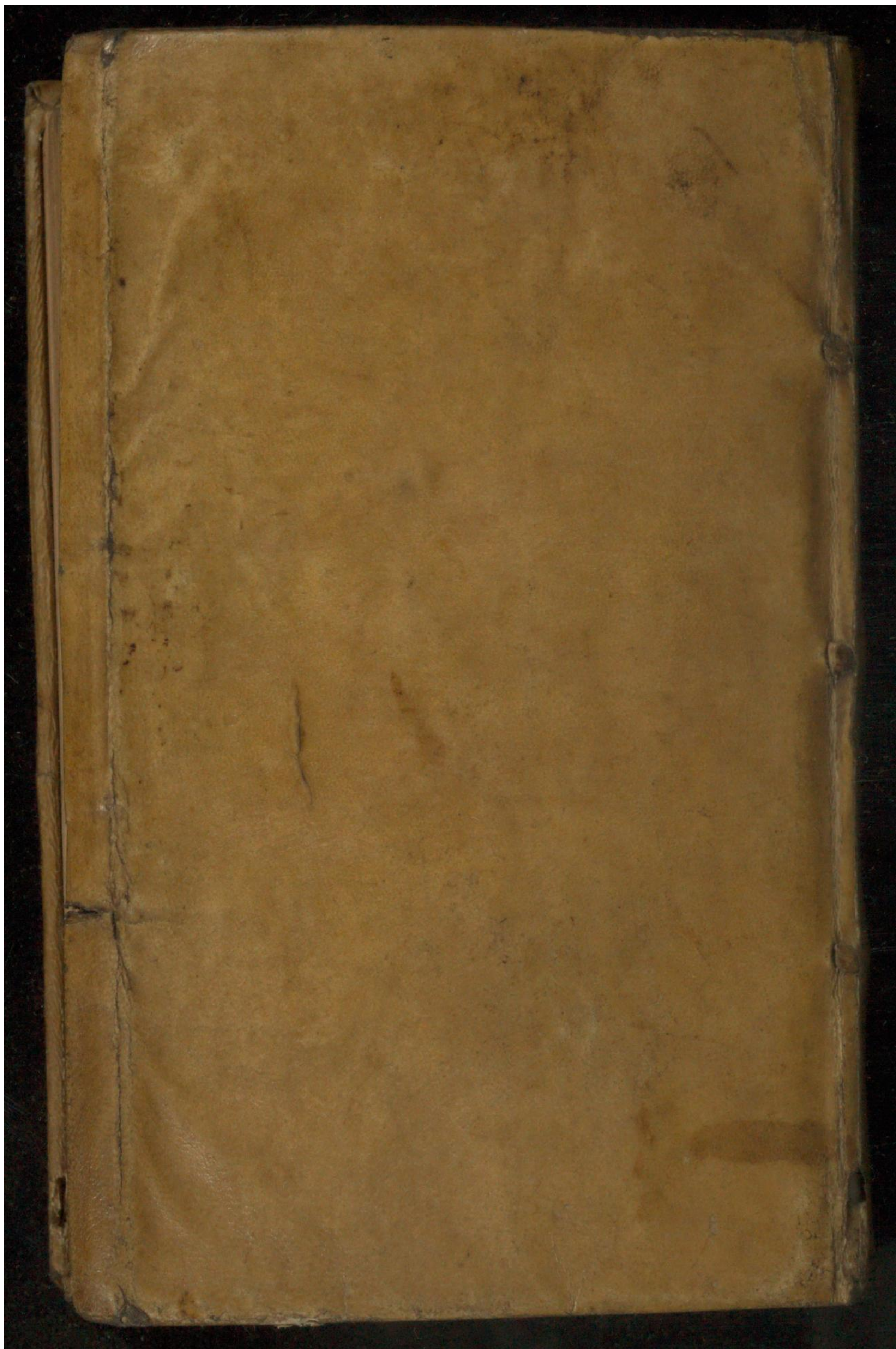



Euclidis
1609









EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBRI XIII.

Succinctis & perspicuis demonstrationibus comprehensi

à

M. AMBROSIO RHODIO Kembergense, Mathematatum Professore extraordinario in Academia Leucorea.

Typis Gormanianis,
Impensis Pauli Helvvigij.

M. DC. IX.



AD

Serenißimum ac Potentißimum Principem ac Dominum

DN. CHRISTIANUM II. DUCEM SAXONIAE, SACRI ROM. IMP. ARCHIMARSCHALLUM & ELECTOREM, Landgravium Thuringiæ, Marchionem Misniæ, Burggravium Magdeburgensem; Dominum suum Clementissimum.

M. AMBROSII RHODII Kembergensis *epistola dedicatoria*.



UM IAM à MULTIS ANnis, Princeps Serenissime, Domine Clementissime, non in schola modò, quæ ad Moldam est, Illustri; sed & Academia, quæ ultra seculum floret ad Albim, cum multis alijs Munificentiam Illustrissimæ Celsitudinis vestræ quasi ordinariam expertus

ſim; ejus inprimis memoriam nulla mihi unquam ex animo eripiet ætas, quam pro diligentiore opera ſtudiorum Mathematicorum culturæ impendenda, annis hiſce proximis ſupra Academiæ ſeculum primum excurrentibus, paulò expertus ſum largiorem. Hujus enim adminiculi ope, non modò academicam hanc vitam, quæ vel unica ſtudijs urgendis optatiſſima videtur, continuare; verùm etiam de quamplurimis Academiæ civibus, quod citra jactantiam dictum velim, varias ſubinde Mathematum partes docendo, benè mereri mihi licuit. Cùm autem animo jam certò conſtituiſſem, etiam ad penitiora harum diſciplinarum, præcipuè verò Aſtronomiæ, Geographiæ & Chronologiæ ſacrâ plures deducere; mearum quod partium, curæ etiam fuit maximæ, ut probè illi principijs tum Geometriæ, tũ Arithmeticæ prius informarentur, per quæ veluti ſcalas duas, ſumma ima quævis in Mathematum ampliſſimo theatro attingere copia ſit. Quod cũ unus optimè præſtet ipſa antiquitate, per tot jam iteratas imperiorum mutationes, ſingulari

Dei

DEI providentia, clarus Euclides, in ſuis Elementis, quæ hactenus ab alijs doctiſſimis Viris ſine imperfectione; imò cum abundante perfectione edita ſunt: à quorum tamen lectione vel cognitione caritas partim exemplarium, partim prolixitas, quæ ingenioſis tædium, tardioribus exiguum præſtat commodum, multos deterrent; id inii conſilium, ut, quantum poſſem, Elementorum tamen probè conſiderata natura & ingenio, ne vel neceſſaria deficerent, vel minus neceſſaria abundarẽt, Euclidea Elementa cum ſuis demonſtrationibus integra, ſed forma quadam contracta, precioq́; exiguo redimenda ederem. Ita enim effecturum me ſpero, ut calami tædio, & tot literarum in demonſtrationibus iterandarum ſcriptione, devitato, intra paucas ſeptimanas, ſolis ocularibus demonſtrationibus crebrius repetitis, multa de Elementis hiſce univerſo ſtudiorum ordini ſummopere neceſſarijs, cognoſcantur, quæ aliàs totidem mẽſibus, & quod excurrit, vix perciperentur. Huic verò operæ meæ, ut Illuſtriſſima Veſtra Celſitudo imprimis & maximè, ſecundùm

 cundùm

cundùm DEum, favere, eamq; in tutelam suam clementer suscipere velit, unicè mihi exoranda videtur: Quod quidem non impetraturum me modò spero; sed planè jam impetratum, futurumque esse confido, ut Clementiam illam pristinam erga me majora atque majora subinde incrementa sumsisse reipsa experiar; & hoc quasi stimulo incitatus, majori, si potero, industria, hoc disciplinarum Mathematicarum studium decurrere & cõficere porrò etiam enitar. Hoc quidem certè habeo polliceri, si quid benedictione divina carius; valetudine optima acceptius; ipsoq; divino favore gratius; id omne, ut pro Illustrissima Cels. vestra, & inclyta Domo Saxonica precibus à Deo æterno pijs impetretur, me vota cum alijs innumeris perpetuò conjuncturum. VVitebergæ X. Calend. August.

ANNO M. D. CIX.

AD

AD

M. AMBROSIUM

RHODIUM, Nepotem ex sorore cariss.

CVM sic ingenium noctesq; diesq; fatiget,
Et sit magnarum nuda MATHESIS *opum:*
Esse aliquem res mira, sui qui prodigus, ævum
In sterili, ut vulgus judicat, arte terat.
Verùm animam ceu nemo suam videt: Haud secus, alter
Gaudia quæ capiat pectore, nemo videt.
Hic tabulæ intentus quærit, num pranderit! urbem
Non sentit, formans pulvere signa, capi.
Alter, jô reperi! geminat, nudusq; per urbem
Evolat inventi cæcus amore novi.
Nobile qui tandem effinxit diagramma, Camœnis
Offert, mactato pinguia sacra bove.
Fas modò sit Phœbi speciem sibi cernere, flamma
Haud neget hic uri cum Phaëthonte pari.
Hoc igitur felicis inaspectabile mentis
Delicium RHODI *præmia summa putas:*
Dum vigil EUCLIDIS *tractas* ELEMENTA, *beati*
Ingenijq; penu divite promis opes.
Præmia jam studij capis haud spernenda: sed olim
Majora à grata posteritate feres.

Johannes VVanckelius,
Hist. P. P.



In
AMBROSII RHODII
Mathematici
Elementa Euclidea.

HOc erat insignem Rhodijs spirare colossũ,
Hoc dignum ambrosio nomine pignus (erat.
EUCLIDI lucere facem, lucere juventæ
Rectà Euclideas vadere scire vias.
En Rhodus, en saltus: hoc auspicio Harpocrateũ
Posse timere senem Leucoris alma nequis.

Adamus Theod.
Adami F. Siberus.



AD
M. AMBROSIUM RHODIUM
Saxonem,
EUCLIDIS GEOMETRIAM
illustrantem.

DOCTI *pulveris Hercules, an Hermes?*
EUCLIDES, *per & has Scholas & istas*

Illotâ teritur manûq; lotâ.
Et hæc sacra Mathese-ωs adæquè
Omnes scire putant. Sciuntnè, RHODI?
Tu scis, optime mystagoga, tu scis.
,, QUI *tendit moderamen arvipendI,*
,, *Non statim bonus agrimensor idem est.*
Plus est esse Geometren: & hoc plus
EUCLIDEM *similare. Nunc ut omnem*
Euclidis Genium adsequantur omnes,
DEMONSTRATIO LINEALIS *exstat.*
Auctor RHODIUS *est. Catum hoc alumni*
Acumen tibi gratulare, Saxo.
EUCLIDES *tenebris opertus, ecquid*
Euclides mihi sit? profectò non est.
Quem nunc RHODIA *lucubravit ætas*
EUCLIDES *tibi* LUCULENTUS *esto.*

Frid. Taubmanus.



DE ELEMENTIS EUCLIDIS PRÆFATIO.



VOD in plerisq; rebus usu venire solet, ut nullum simul opus & inceptum & perfectum sit, sive quòd dies diem docet; sive quòd oculi plus vident quàm oculus; sive quòd Deus ipse Sapientiæ suæ semina in homines ita dispergit, ut accrementa in altis magis juvet & promoveat; idem cùm in universa Philosophia, tum vel maximè in Mathematicis observare licet. Sicut enim in illa primitus tantùm non infinitæ, eæq; absurdissimæ à variis Sophistis disseminatæ erant opiniones, quas tandem Plato & Aristoteles messe feliciore omnes collegerunt, resectisq; & rejectis, ingenij pariter & judicij acie mira, tum absurditatibus, tum vanitatibus, integrum & perfectum quoddam Philosophiæ corpus relinquere posteritati voluerunt: Ita etiam olim, cùm maximo essent in precio studia mathematica; varia à variis erãt inventa theoremata & problemata, quæ tandem nacta sunt Geometrã acutissimum Euclidem, paulò post obitum quod vero simile videtur, Alexandri M. qui omnia illa cum suis principiis collegit, elegantissimoq; disposuit ordine, & eruditione tanta contexuit, ut Aristarcho nullo indiguisset, nisi communi quodam præstantissimorum virorum fato & ipse illo carere nequiisset. Nam quod Euclides ædificium Sphæricum,

ricum.proportione elegantissima, mirabili corporum quinque Regularium inscriptione exornarat, & multorum jam seculorum ætatem tulerat; id anatomia syntaxiq; nova, in Hortum quendam, unumquodq; suo convenienti loco reponens, ut velle videtur, permutavit, exclusis multis ignorantiæ mirum in modum medentibus, herbis. Quâ Horti illius amænitatem labilem præterimus, & cum magnis illis Geometris, Archimede, Apollonio Pappo, Sereno, Hypsicle, Ptolemæo, Copernico aliisq; innumeris, ædificii hujus Euclidei commoditatibus fruimur, quod nos contra omnis generis tempestates tueri potest, quovis & anni & ætatis tempore. Cæterùm ELEMENTORUM hoc nomen jure sibi vendicat hic tractatus, quod consideratio omnium, ad aliorum, per universam Mathesin, pertransit scientiam, ex quibus dubiorum, quæ in ipsis contingunt, succurrit nobis solutio; sine quibus quàm impudenter aliquis adibit scientias mathematicas, tam infeliciter easdem tractabit. Neq; ulla deest ipsi conditionum, quæ in Elementis reperiri solet. Supervacuum enim omne, tanquam impedimentum est sublatum; eliguntur cuncta, quæ propositum continent & concludunt: dilucitatis ac brevitatis cura habetur maxima, ne contraria perturbent cogitationem: Deniq; etiam universalis theorematum in terminis comprehensio suum hîc locum invenit; nam quævis cognitio incomprehensibilis efficitur iis, quæ doctrinam in particularia frusta dissecant.

Ordine autem hoc pulcherrimo procedit Euclides. Cùm Geometria maxime occupetur, ut Proclus ait, in figurarum contemplatione, quæ vel planæ vel solidæ sunt: Linearum enim, tanquam terminorum, non requirebatur

peculiaris

peculiaris consideratio: de planis quidem Libris sex prioribus; de Solidis in tribus ultimis agere voluit. Cæterùm, ne imperfecta esset illa Stereometria, quam plurimum juvat notitia linearum Commensurabilium & incommensurabilium, tribus illis præmisit decimum, in quo copiosè de illis disserit. Tandem neq; hæc quidem tractatio in se perfecta esse poterat absq; numerorum notitia; ideoq; ipsorum quoq; affectiones tribus, decimum præcedentibus libris demonstrare abundè voluit. Sunt itaq; veluti quatuor principalia Elementorum Euclideorum membra, quorum primum est Geometricum, quatuor quidem prioribus libris absolutam figurarum contemplationem absolvens, quinto proportiones magnitudinũ in genere persequens; sexto proportiones figurarum planarum inter se exponens. Secundum Arithmeticum, tribus libris, numerorum, quibus cum magnitudinibus, tanquam binis omnium quantitatum radicibus, magna intercedit communio & societas, demonstrans affectiones proposito sufficientes. Tertium quasi mixtum de lineis commensurabilibus & incommensurabilibus agit, quarum natura maximè in numeris evidens est, ususq; maximus & necessarius ad rectè percipiendas proportiones laterum in quinque corporibus regularibus, plerũq; incommensurabilium. Quartũ Stereometricum scientiam tradit Solidorum, quæ præcipuæ corporum affectiones demonstrantur, inprimis autem quinq; corporum regularium Sphæræ inscribendorum constructio, & mutua proportio; unde tandem elegantißimum illud Mathematicum ædificium constat, quod propositione ultima libri decimitertij absolvitur. Possunt quidẽ de Corporibus plura, eaq; jucundißima demonstrari, ut ex libris illis tribus decimum tertium sequentibus.

bus, qui Euclideis vulgò solent addi, perspicuum est, quibus Doctissimus Clavius magnam operam, magnumq; laborem impendit: Caeterum Euclidei tredecim nobis pro nostro instituto sufficiant, quibus cognitis, qui sese totos huic studio sunt tradituri, non Campanum modò & Clavium; sed quosvis alios nobiliores Geometras magno cum fructu legent, intelligent. Vt autem quatuor operis Euclidei nostri posuimus membra; ita, singulis illis sua propria praemittuntur principia, ex quibus demonstrationum omnium mathematicarum longè accuratissimarum, certissimarumq; robur ac firmamentum nascitur. Suntq; principiorũ tria genera: primum Definitiones seu Hypotheses, quibus explicantur vocabula artis, ne qua nominum ambiguitate vel obscuritate circumventi, paralogismos incurramus; & has unumquodq; illorum membrorum habet peculiares. Deinde sunt αἰτήματα seu postulata, quae adeò sunt clara & perspicua in subjecta scientia, ut nulla indigeant confirmatione, sed nudum auditoris assensum requirunt, ne in demonstrando ulla vel haesitatio vel difficultas oborlatur. Deniq; sunt Communes notiones, seu Axiomata & dignitates, quae non in hac tantùm, sed in omnibus aliis Scientijs ita sunt manifestae, ut nemo non ultrò assensum addat, qui tantùm vocabula intelligit. Ex hisce principijs constituuntur & demonstrantur duplices propositiones; Problemata, in quibus ponitur aliquid, quod nondum est, constituendum: & Theoremata, in quibus aliquid vel inesse vel non inesse constitutae quantitati demonstratur. Differuntq; 1. fine; illorum enim est constructio, horum cognitio, quod etiam clausula distincta indicare solemus; Quod erat faciendum, in illis; Quod e-

rat

rat ostendendũ, in his. 2 Vsu: illa enim Mechanicis, hæc de-
monstrationibus inserviunt. 3. Accidentibus, quæ in illis
non sunt perpetua, nec perpetuò comitantur sua subjecta,
quia vitiosa potest esse constructio; in his verò semper sunt
eadem. Ipsæ Demonstrationes sex absolvuntur partibus.
Prima πρότασις est generalis propositio demonstrationis,
quæ monet, quibus positis & concessis, quæ quæsita sint de-
monstranda. Hæc si theorema sit, habet duas partes, ἡγού-
μενον & ἑπόμενον: Sin problema, δεδομένον, quod consti-
tuit subjectum, de quo aliquid affirmatur vel negatur;
vel quomodocunq; quæritur; & ζητούμενον, quod ostendit,
quid in subjecto sit demonstrandum. Secunda est ἔκθεσις
expositio seu declaratio dati vel antecedentis, quæ datum
seorsim repetit & explicat: Sicut tertia διορισμὸς quæsi-
tum; quam utramq; partem commodissimè exhibent li-
teræ contextui propositionum insertæ, sed formæ distinctæ,
citra ullam cursus propositionum confusionem. Quarta
constructio κατασκευὴ seu delineatio, quæ præparat & ac-
cõmodat ea, quæ ad demonstrationem accidentium dati
requiruntur & necessaria sunt. Quinta, eaq; præcipua
ἀπόδειξις demonstratio, quæ per prima, nota & concessa,
vel etiam antè demonstrata demonstrat id, quod de da-
to ostendendum est. Et hæc progressum observat duplicem.
Vel enim à principijs natura notis, ut sunt definitiones,
postulata & axiomata, vel etiam antea demonstratis,
quæ & ipsa ad principia possunt reduci, procedimus, quæ
Methodus συνθετικὴ dicitur; vel procedimus à quæsito &
posteriore ad prius & principia, quæ vel est θετικὴ τῶν ἀρ-
χῶν & πίστις ἀναλυτικὴ dicitur; vel ἀναιρετικὴ τῶν ἀρχῶν &
ἀπαγωγὴ εἰς ἀδύνατον dicitur. Sexta συμπέρασμα quæ
demon-

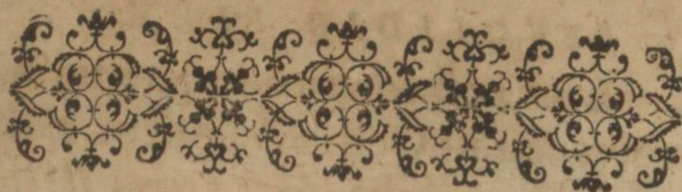
demonstrata ad propositionem refert, eamq; rectè demonstratam esse affirmat. Propositionibus cognatum est λῆμμα, quæ in Geometricis est propositio indigens probatione, acciditq; tum constructioni, tum demonstrationi, hoc differens à principijs, quòd hæc nulla indigent demonstratione; illud autem demonstrari cùm possit, absq; demonstratione sumitur, ad aliorum faciendam fidem. Corollarium etiam theorema est, quod per se ex demonstrationibus propositionum sequitur, sine nova ac peculiari demonstratione. Hæc tanquam necessaria ad pleniorem cognitionem autoris præmittenda mihi videbantur. Frugalissimas itaq; hasce disciplinas, Geometriam & Arithmeticam, in hisce Elementis Euclideis exornatas, (quanquam parùm πρὸς τὰ ἄλφιτα facere censentur; ut & difficiles; sed illis, qui vel antè pronunciant, quàm inspiciant: vel priùs abijciunt studium, quàm periculum fecerint:) si quis impensiùs coluerit, ipso experietur opere, plus habuisse in recessu, quàm magnifica minus fronte promiserunt: in primis autem, si non Magnitudinum & Numerorum hac Philosophia, veritatis quendam amorem ingeneratum; at saltem divinitus innatum sibi confirmari & cōservari percipiet; sentietq; quàm notabili fruge vegetior sibi reddatur, luxurietvè toris animosi pectoris ardor. Opere verò etiam experietur ipso, si quarũvis rerum fuerint expediendæ dimensiones, veluti longitudinum, latitudinum, planicierum, agrorum, insularum; altitudines turrium, montium; cœlestia φαινόμενα per instrumenta accuratè observanda & examinanda; horologia scioterica delineãda; machinæ variæ exstruẽdæ,

usur-

usurpandæ; ponderum rationes exponendæ; phænomena ex illuminatione diversa speculorum, picturarum aquæ & aeris excusanda; Deniq; sive speculationibus indulgere velit cœlestibus, sive elementaribus quæ ἀγεωμέτρητοι non ferunt, quanto & incitamento & adjumento, addo etiam complemento hæc elementa sint futura.



EUCLI-



EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.

Definitiones.

I.

PUnctum est, cujus pars nulla est, id est, punctum est quiddam indivisibile, quod mente tantùm concipitur. *Non enim punctum est quantitas, sed omnium quantitatum continuarum principium, quæ potentia in infinitum sunt divisibiles. Illud autem quod creta pingitur punctum, Physicum, non mathematicum est, quippe non omni carens latitudine, quo interim facilioris doctrinæ gratia utimur.*

2. Linea est longitudo latitudinis expers, seu, ut Gellius loquitur, Longitudo illatabilis. *Hæc prima species est quantitatum continuarum duntaxat longa.*

3. Termini linearum sunt puncta: actu quidem in linea recta terminata; in peripheria circuli potentia.

4. Recta linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta, id est, in qua nihil flexuosum reperitur. *Archimedes brevissimam esse dicit earum, quæ eosdem habent terminos: vel est brevissima à puncto ad punctum extensio.*

5. Superficies est, quæ longitudinem latitudinemque tantùm habet. *Hæc secunda magnitudinum species est, quæ præter dimensionem, quam secundum longum communem habet cum linea, etiam secundum latitudinem mensurabilis est; omni tamen mensura in profundum destituta.*

6. Super-

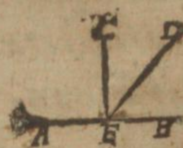
6. Superficiei extrema sunt lineæ. *Sic trilateræ figuræ tribus, quadrilateræ quatuor, multilateræ multis terminantur lineis: Circulus una.*

7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interjacet lineas. *Estque omnium, quæ eadem habent extrema, & minima & brevissima.*

8. Planus angulus est linearum in plano se mutuò tangentium & non in directum jacentium, alterius ad alterum inclinatio. *Iacentes enim in directum lineæ, si protrahantur, nunquam concurrunt, ita ut se secent protractæ & sic angulos non efficiunt.*

9. Rectilineus est angulus, cum, quæ angulum continent lineæ, sunt rectæ. Curvilineus autem, qui ex duabus curvis: mixtus qui ex una curva & altera recta.

10. Cum recta linea super rectam consistens lineam, eos, qui sunt de-



inceps, angulos *aec*, *ce b* æquales inter ſe fecerit; rectus eſt uterq; angulorum: & quæ inſiſtit, linea *ce*, perpendicularis vocatur ejus, cui inſiſtit.

11. Angulus obtuſus eſt *aed*, qui recto major eſt;

12. Angulus autem acutus *bed*, qui recto minor.

13. Terminus eſt, quod alicujus extremum eſt. *Sic puncta linearum, lineæ ſuperficierum; ſuperficies corporum ſunt termini. Corpora verò, quia ab alia quantitate nulla dimenſione ſuperantur, nullius etiam termini eſſe poſſunt.*

14. Figura eſt, quæ ſub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur. *Ita videlicet, ut circumquaque illis terminis claudatur.*

15. Circulus eſt figura plana, ſub una linea comprehenſa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

16. Hoc

16. Hoc punctum centrum circuli appellatur.

17. Diameter circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraq; parte in peripheriam terminata, quæ circulũ biſariam ſecat, & totum planum contentum peripheria, & ipſam peripheriam in partes æquales, cum nulla alteram excedat.

18. Semicirculus eſt figura, quæ continetur ſub diametro & ſub ea linea, quæ de circuli peripheria auffertur, *id eſt, ſemiperipheria.*

19. Figuræ rectilineæ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur. *Ideoq; curvilineæ erunt, quæ curvis; & mixtæ, quæ mixtis lineis continentur.*

20. Trilateræ quæ ſub tribus.

21. Quadrilateræ, quæ ſub quatuor.

22. Multilateræ, quæ ſub pluribus, quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.

23. Trilaterarum figurarum æquilaterum eſt triangulum, quod tria

latera habet æqualia. *Duplicem habet divisionem triangulorum, alteram ex lateribus, alteram ex angulis.*

24. Isosceles est, quod duo tantùm æqualia habet latera; *tertio vel majore vel minore.*
25. Scalenum est, quod tria inæqualia habet latera.
26. Adhæc etiam trilaterarum figurarum, rectangulum, quidem est triangulum quod rectum habet angulum: *sive illud sit Isosceles sive scalenum.*
27. Ambiygonium, quod obtusum habet angulum; *itidem vel isosceles vel scalenum.*
28. Oxygonium, quod tres habet acutos angulos. *Estq; vel æquilaterum, vel Isosceles, vel scalenum.*
29. Quadrilaterarum figurarum, Quadratum est, quod & æquilaterum est, & æquiangulum.
30. Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem est, sed non æqui-

æquilatera. *Habet enim tantùm duo opposita latera æqualia. Alij oblon um: alij rectangulum vertunt.*

31. Rhombus, quæ æquilatera, sed rectangula non est. *Sunt enim bini tantùm oppositi anguli æquales.*

32. Rhomboides, quæ adversa & latera & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula. *Opposita est quadrato omni ex parte.*

33. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ Trapezia appellantur. *Vocantur irregulares, quoniam infinitis possunt variari modis. Estque Trapezium aliud Isosceles, quod duo latera opposita parallela, duo verò æqualia: aliud scalenum, quod duo tantùm opposita parallela habet. Trapezoiles, quod neque parallela, neque æqualia habet latera.*

34. Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex u-

traque parte in infinitum producuntur, in neutra ſibi mutuo concurrunt.

35. Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera ſunt parallela ſeu æquidiſtantia. *Vt ſunt quadrata, oblonga, Rhombus & Rhomboides.*

36. Cum verò in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq́; lineæ lateribus parallelæ, ſecantes diametrum in uno eodemq́ue puncto, ita ut parallelogrammum ab hiſce parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma: Appellantur illa, per quæ diameter non tranſit, complementa: duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum conſiſtere dicuntur. *Vide propoſition. 43.*

PETITIONES, SIVE poſtulata.

1. Poſtuletur, ut à quovis puncto in quodvis punctum rectam lineam ducere concedatur.

2. Et

2. Et rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.

3. Quovis centro & intervallo circulum describere.

COMMVNES NOTIONES *sive Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent & dignitates.*

1. Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod uno æqualium majus est, aut minus, majus est aut minus altero æqualium. Et si unum æqualium majus est, aut minus aliqua magnitudine, alterum quoque æqualium eadem magnitudine majus est, aut minus.

2. Et si æqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt æqualia.

3. Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur sunt æqualia.

4. Si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia. Et si æqualibus inæqualia sint adjecta, majori

majus & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

5. Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à majori minus, & à minori majus, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

6. Quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. Et quod unius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium. *Idem intelligendum est de triplo & quadruplo, & cæteris.*

7. Quæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia. Et contra quæ æqualia sunt, ejusdem sunt dimidia. *Pari ratione, quæ ejusdem sunt partes tertiæ vel quartæ, &c. inter se snnt æquales.*

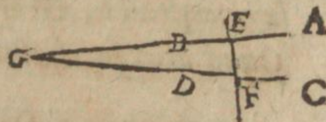
8. Quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia. *Intelligendum est axioma de magnitudinibus ejusdem speciei,*

ciei, quarum una superposita alteri, neutra alteram excedit. Sic linea lineæ congruens, eidem æqualis est, non autem applicari dicitur linea superficiei. Neque tamen confundenda est ἐφάρμωσις hæc mathematica, cum applicatione Mechanica vel Physica.

9. Totum sua parte majus est. *Aliàs ablata parte tolleretur totum.*

10. Omnes anguli recti sunt inter se æquales. *Quia latera sine inclinatione ulla sibi perpendiculariter insistunt.*

11. Si in duas rectas *ab*, *cd*, altera recta linea *ef* incidens, internos, ad easdem partes, angulos *bef*, *dfe*, duobus rectis minores faciat; duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ, sibi mutuò incident in *g*. ad eas partes, ubi sunt anguli, duobus rectis minores.



12. Duæ

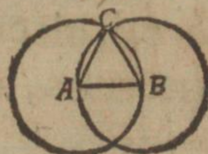
12. Duæ rectæ lineæ ſpacium non comprehendunt. *Si enim coëant in uno puncto ad efficiendum angulum, ex altera parte neceſſario magis ac magis disjungentur. Ad minimum ergò requiruntur lineæ tres rectæ ad ſimpliciſſimam figuram rectilineam conſtituendam.*

PROPOSITIO I.

Problema 1.

Super data recta *a b* terminata, Triangulum æquilaterum *a b c* conſtruere.

Intervallo ab *ex* a *&* b *deſcribantur duo circuli, quorum interſectio* c α *connectatur cum* a *&* b. *Quoniam igitur eidem* a b β *æquales ſunt* b c *&* a c, *erunt etiam inter ſe* γ *æquales, & triangulum* a b c *æquilaterum. Quod erat faciendum.*



α 1. Poſtul.
β 15. def: 1.
γ 1. axiom.

PROPOSITIO II.

Problema 2.

Ad datum punctum *b*, datæ rectæ lineæ *a*, æqualem rectam *b d* ponere.

Inter-

Intervallo a *lineæ* α *describatur centro* b *circulus* c d. *Cum ergò ipsi* b c *sint æquales* β b d *&* γ a. *Proinde ad punctũ* b *posita* β b d, *erit etiam ipsi* a δ *æqualis. Quod erat faciendum.*



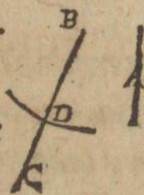
α Postul.
β 15. def. 1.
γ ex hyp:
δ 1. axio.

PROPOSITIO III.

Problema 3.

Duabus datis rectis inæqualibus; de majore *cb*, minori *a* æqualem rectam *db*, abscindere.

Cento b *intervallo* a α *secetur* c b *in* d, *& erit* d b β *æqualis ipsi* a.



α 2. I.
β 15. def. I.

PROPOSITIO IV.

Theorema 1.

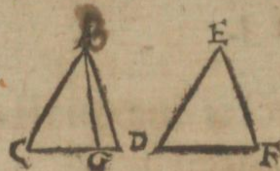
Si duo Triangula *bcd*, *def*, duo latera *bc*, *ed*, duobus lateribus *bd*, *ef* æqualia habeant, utrumq; utriq; : habeant verò & angulum *cbd*, angulo, *def* æqualem, sub æqualibus rectis lineis contentum : & basin *cd* basi *df*, æqualem habebunt ; eritque



Trian-

Triangulum *cbd* Triangulo *def* æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterq; utrique, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur.

α 3. 1. *Si baſis* c d *eſt major, quàm baſis* d f, α *auferatur ex* c d, c g *æqualis ipſi* d f, *& ducatur* b g. *Si jam* b c, b g *ſunt æquales ipſis* e d, e f, *& baſis* c g, *baſi* d f; *non erit tamen angulus* c b g *angulo* e β *æqualis, defectu anguli* g b d. *Quod eſt contra hypotheſin. Ideoq; ſi tres termini Trianguli congruant tribus terminis alterius Trianguli applicati, reliquos reliquis ettiam* γ *congruere, & totum toti æquale eſſe neceſſum eſt. Quod erat oſtendendum.*



β 9. axio.

γ 8. axio.

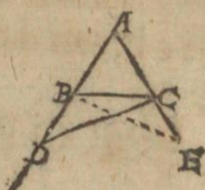
PROPOSITIO V.

Theorema 2.

Iſoſcelium Triangulorum *a b c*, qui ad baſin ſunt anguli *a b c* & *a c b*, inter ſe ſunt æquales: & productis æqualibus rectis *a b*, *a c* lineis, qui ſub baſi ſunt anguli *d b c* & *e c b*, inter ſe ſunt æquales.

Lateribus

Lateribus a b, a c *æqualibus, æqualiter extensis in* d *&* e, *ducantur* c d, b e. *Quoniam ergò in Triangulis* d a c *&* e a b *dantur duo latera,* a d, a c *æqualia duobus lateribus* a e *&* a b, *& angulus* a *utriq; communis; erit etiam basis* b e *basi* c d *æqualis, & angulus* d, *angulo* e, *& angulus* a b e *angulo* a c d. *Rursus in Triangulis* b d c *&* c e b *æqualium laterum* c e *&* b d, b e *&* c d, *& angulorum* d *ipsi* e: *erunt etiam anguli* e c b, d b c *sub basi* α *æquales, sicut &* e b c *&* d c b *æquales, quibus ablatis ab æqualibus* a b e *&* a c d, *relinquentur* a c b *&* a b c *anguli ad basin* β *æquales. Idem quoque de Triangulis æquilateris verum est. Unde sequitur Triangula æquilatera etiam esse æquiangula.* α 4. 1. β 3. ax.



PROPOSITIO VI.

Theorema 3.

Si Trianguli *a b c* duo anguli *b, c,* æquales inter se fuerint, etiam sub æqualibus angulis subtensa latera *a b* & *a c* æqualia inter se erunt.

Conversa prioris.

Si quis neget, angulis b, c α *æqualibus æqualia opponi latera* a b, a c; *dicat* a b *esse longius* a c, *cui æquale sit* d b *ex* a b β *abscissum. Ducta linea* α ex hyp. β 3. 1.

d c:

d c: *in Triangulis* a c b *&* d b c *propter latera æqualia, ac ipsi* d b *&* b c *commune; angulumq; b angulo c æqualem: necessariò etiam bases* d c, a b *erunt* δ *æquales; & totum Triangulum* a c b, *toti* d c b, *pars toti, quod est* ε *impossibile.*

γ ex dato.

δ 4. 1.

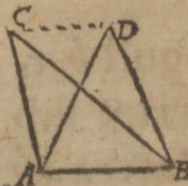
ε. 9. ax.



PROPOSITIO VII.

Theorema 4.

Super eadem recta ***a b*** duabus eisdem rectis ***a c, b c*** aliæ duæ rectæ ***a d, b d*** æquales, utraq; utriq; non constituentur ad aliud atque aliud punctū, ad easdem partes, *supra vel infra*, eosdemq; terminos ***a*** & ***b***, cum duabus ***a c, b c*** initio ductis habentes.



Constituantur, si potest, ad aliud punctum d *aliæ duæ rectæ prioribus æquales* a d *ipsi* a c *&* b d *ipsi* b c, *& conectantur puncta* d c. *Erunt Triangulorum* α *Isoscelium* a c d *&* b d c β *æquales anguli ad basin* a c d *ipsi,* a d c, *&* b d c *ipsi* b c d. *Vnde fit, ut, quia* a c d *æqualis est partiali* a d c, *quo major totalis* b d c *æqualis est partiali* b c d, *totus* a c d *fiat partiali* b c d *minor. Quod* γ *absurdum.*

α ex hyp.

β 5. 1.

γ 9. ax.

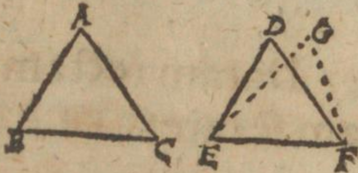
PRO-

PROPOSITIO IIX.

Theorema 5.

Si duo Triangula *abc, def*, duo latera *ab, ac*, duobus lateribus *de, df*, utrumque utrique æqualia; habuerint verò & basin *bc* basi *ef* æqualem; angulum quoque *a* sub æqualibus rectis lineis contentum, angulo *d* æqualem habebunt.

Convertit primam partem propositionis 4.



Quando latera singula singulis, basiq; basis applicata conveniunt, α *convenire etiam totum Triangulum toti oportet & angulum* a, *angulo* d. *Nisi enim* a *cadat in* d, *sed in* g, *super eadem linea* e f, *duabus eisdem rectis* d e, d f, *aliæ duæ rectæ æquales* e g, g f *utraq; utriq; ad eandem partem, eosdemq; terminos constituentur. Quod est* β *impoßibile.*

α 8. axiom.

β 7. 1.

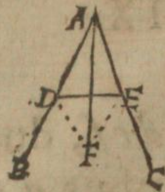
PROPOSITIO IX.

Problema 4.

Datum angulum *bac* rectilineum bifariam secare.

Ex a b α *abscindatur* a d, *pro libitu assumtæ* a c *æqualis; atq; ad ductam lineam* d c β *ponatur*

α 3. 1.
β 1. 1.



tur Triangulum æquilaterum, vel etiam Isosceles d f e, *& connectantur* a f. *Erunt in Triangulis* d a f *&* e a f γ *æqualium laterum* a d *ipsi* a c, *&* a f *communi, & basiũ* d f, e f; *anguli* d a f *&* e a f δ *æquales, sectusq́; angulus* a *in duos æquales angulos. Sed in praxi sufficit in utravis parte punctum supremum* f *per occultam intersectionem arcuum notasse.*

γ ex constr.

δ 8. 1.

PROPOSITIO X.

Problema 5.

Datam rectam finitam *a b*, bifariam secare.

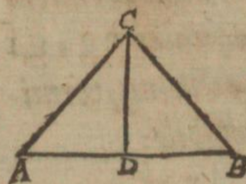
α 1. 1.

β 9. 1.

γ ex constr.

δ 4. 1.

Super data recta a b α *constituti trianguli* a c b *angulum* c β *bisecans linea* c d, *bisecat &* a b *lineam datam in* d. *Quia enim in triangulis* a c d *&* b c d, γ *æqualia sunt latera* a c *&* b c, c d *verò commune, & anguli comprehensi* c β *æquales; erunt & bases* a d *&* d b δ *æquales; & recta* a b *in* d *bisariam secta.*



PROPOSITIO XI.

Problema 6.

Datæ rectæ *ab*, à puncto *c* in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

Puncto c *impositus circinus utrinq; trãsferat æquales partes* c d, c e, *ac super tota* d e α *constituatur Triangulum vel æquilaterum vel Isosceles* d e f, *ducaturq;* f c. *Iterũ propter latera* cd, c e β *æqualia & c* f *commune; & bases* d f, e f *æquales*, γ *æquales sunt anguli ad* c *contigui, id est, recti, &* f c δ *perpendicularis ex puncto* c *erecta*.

α 1. I.
β ex constr.
γ 8. I.
δ 10. def. I.



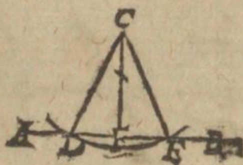
PROPOSITIO XII.

Problema 7.

Super datam rectam infinitam *ab*, à dato puncto *c*, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Ex centro c *arcus circuli intersecet* a b *in* d e *&* d e α *dividatur bisariam in* f, *erit* f c β *perpendicularis : uterque enim ad* f *contiguus est* γ *æqualis seu rect9. propter latera* f d, f e *æqualia &* f c *commune, propterq; bases* d c, c e δ *æquales*.

α 10. I.
β 10. def. I.
γ 3. I.
δ 15. def. I.



PROPOSITIO XIII.

Theorema 6.

Utut recta *a b* super rectam *c d* consistens, angulos faciat; aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

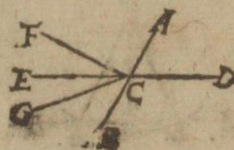


α 10. def. 1.
In perpendiculariter insistentibus, e b *nimirum ipsi* c d *res est* α *manifesta. Sed si* a b *non sit perpendicularis, ex puncto* b β *erecta perpẽdiculari* b e,
β 11. 1.
videmus angulos a b c *&* a b d *simul sumtos tantundem occupare spacij, quantum duo recti* e b c; *&* e b d *atq; mutuo* γ *congruere.*
γ 8. ax.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 7.

Si ad aliquam rectam *a b* atque ad punctum *c* in ea, duæ rectæ *c d* & *c e* non ad easdem partes ductæ *d* vel *e*, eos qui sunt deinceps angulos *a c d*, *a c e*, duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ *c d*, *c e*, seu recta una.



Si d c e *non est recta una, esto* d c f. *In hanc ergo rectam incidens recta* a c, *faciet duos angulos duobus rectis* α *æquales* a c d *&*
α 13. 1.

& a c f. Erant autem & a c d & a c e β æquales duobus rectis. Ablato itaq; communi a c d, γ æquales relinquentur a c f, a c e minor majori, vel pars toti. Quod absurdum. β ex hypot: γ 3. axiom.

PROPOSITIO XV.

Theorema 8.

Si duæ rectæ ***a b*** & ***c d*** se invicem secuerint, angulos ad verticem: inter se æquales efficient.

Sunt enim a e c *&* a e d *duobus rectis* α *æquales. Sunt item* a e d *&* d e b *duobus rectis æquales. Ablato ergò communi* a e d, β *relinquentur* a e c *&* d e b *æquales, anguli ad verticem.* α 13. I. β 3. axiom.

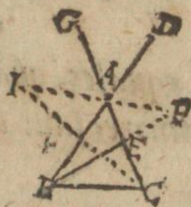


PROPOSITIO XVI.

Theorema 9.

Omnis Trianguli ***a b c*** uno latere ***b a*** producto externus angulus ***d a c*** utroq; interno, tam ***a c b***, quàm ***a b c***, & opposito major est.

α *Dividatur* a c *bifariam in* e; *& ductæ rectæ,* b e β *continuetur æqualis usq; in* f; *conjungaturq;* a f. *Iam in Triangulis* c e b *&* a e f *latera* e a *&* e c, e b *&* e f *sunt* γ *æqualia;* δ *anguliq;* a e f *&* b e c. α 10. I. β 3. I. γ ex constr. δ 15. I. 4. I.



 Ergò

Ergò & totum triangulum toti erit ε *æquale, &*
ε 4. l. *angulus* e c b *ipsi* e a f, *quo tanquam parte externus totus* c a d *est major.*

Ita pro angulo a b c α *dividatur latus* a b *bifariam, & rectæ* c h *in continuum abscindatur* β *æqualis* h i, *connectaturq;* i a. *Rursum in Triangulis* c h b *&* a h i γ *æqualia sunt latera* a h *&* h b, h c *&* h i, δ *angulique* c h b *&* a h i. *Totum ergò triangulum toti est* ε *æquale, & angulus* i a h *ipsi* h b c, *cui æqualium duorum ad verticem alter* d a f *tanquam pars minor est toto externo* c a d.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 10.

Omnis Trianguli *a b c* duo anguli, duobus rectis sunt minores, quomodocunque sumti.



α 16. l. *Producto latere* c b, *angulus externus* a b d α *major est interno opposito* a c b. *Si utrique jungatur*
β 4. axio. *angulus communis* a b c, β *majores erunt* a b c, a b d *ceu duobus rectis*
γ 13. l. γ *æquales, quàm interni duo* a b c *&* a c b. *Itaq; minores sunt duobus rectis.*

PRO-

PROPOS: XIIX.

Theorema 11.

Omnis trianguli *abc* majus latus *ac* majorem angulum *a b c* subtendit.

α Abscindatur ex ac *ipsi* ab *æqualis* ad *&* *ducatur* bd. *In triangulo β Isosceli ergò* bad, *anguli* abd *&* adb *sunt γ æquales. Sed hic tanquam externus δ major est interno opposito* bcd. *Ergò et* abd. *Ejus autem totius* abc *multo erit major. Idem demonstratur eodem modo de altero angulo* a.

α 3.1.
β ex constr.
γ 5.1.
δ 16.1.



PROPOS: XIX.

Theorema 12.

Omnis trianguli *abc* major angulus *b* majori lateri *ac* subtenditur.

Sin minus, esset latus ac *vel æquale lateri* ab, *& sic anguli* c *&* b *essent α æquales contra datum: aut minus, atque sic oporteret* ac *tanquam latus minus β majorem angulum* b *subtendere, latusq;* *majus* ab, *minorem* c. *Quod γ absurdum.*

α 5.1.
β ex hyp.
γ 18.1.



PROPOSITIO XX.

Theorema 13.

Omnis trianguli *abc* duo latera *ab*, *ac*, reliquo *bc* sunt majora, quomodocunque sumta.



Est enim b c *inter* b *&* c *omnium* α *brevissima*.

α 4. def. 1.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 14.

Si super trianguli *abc* uno latere *bc*; ab extremitatibus, duæ rectæ *bd*, *cd*, interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus *ba*, *ca* minores quidem erunt, majorem verò angulum *d* continebunt.



α 20. 1.

β 4. axiom.

γ 16. 1.

Producto latere b d *in* e, *in triangulo* b a e, *latera* b a, a e *simul* α *majora sunt tertio* b e, *additoq;* e c *communi*, b a, a c β *majora erunt* b e, e c *simul sumtis* : α *ita &* c e, e d *quàm* d c, *sic* b d, d c *simul* β *minores ipsis* b e, e c : *Ideoq; & minores sunt majoribus* b a, a c. *Sic tanquam externus* d *angulus* γ *major est angulo* e *interno opposito* ; *& hic itidem tanquam externus interno* a : *itaq; &* d *major est ipso* a.

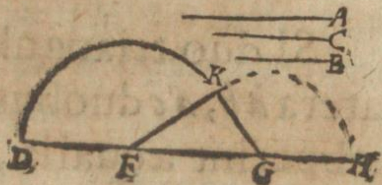
PRO-

PROPOSITIO XXII.

Problema 8.

Ex tribus rectis lineis *fg*, *fk*, *kg*, quæ sunt datis tribus, *abc*, æquales, triangulum *fkg* constituere. Oportet autem duas reliqua esse majores omnifariam sumtas: quoniam uniuscujusque trianguli duo latera quomodocunq; sumta reliquo sunt majora.

Datæ a *æquali* f g *utrinque apponantur in directum* f d *&* g h *æquales ipsis* b *&* c, *& illarũ intervallo descriptorum circulorum intersectio* k *cum* g *&* f *connexa, exhibet triangulum* f k g, *cujus latera datis tribus rectis sunt* a *æqualia. In praxi sufficit tantùm ad tertiæ lineæ extremitates intervallo reliquarum duarum intersectionem notasse, eamq; cum illis extremitatibus copulasse per rectas.* a ex constr. & 15. def. 1.



PROPOSITIO XXIII.

Problema 9.

Ad datam rectam *ab*, datumque in ea punctum *c*, dato angulo recti-

lineo *d e f*, æqualem angulum *i c k* rectilineum constituere.

In lineis e d, e f *angulum datum* e *includentibus sumta duo puncta pro libitu* g *&* h *connectantur, ipsisq;* e g *æqualis in* a b *fiat* c i, *cui* α *accommodentur duæ reliquæ* g h *ceu* i k, *&* e h *ceu* k c. *Erit* i c k *suis lateribus & basi* β *æquale triangulo* g e h, *&* a d *punctum* c *factus angulus* γ *æqualis angulo* e.

α 22. 1.

β ex constr.

γ 8. 1.



PROPOS: XXIV.

Theorema 15.

Si duo triangula *a b c*, *d e f* duo latera *a b*, *a c* duobus lateribus *d e*, *d f* habuerint æqualia, utrumq; utriq; angulum *a* verò angulo *d* majorem, sub æqualibus rectis lineis contentum: & basin *b c*, basi *e f* majorem habebunt.

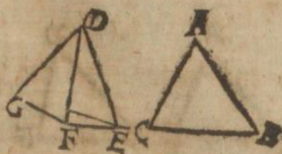
α 23. 1.
β ex constr.

α *Fiat ad punctum* d *angulo* a *æqualis, ut latus* d g *sit* β *æquale lateri* d f, *cadetq;* e g *vel in* e f *vel supra, vel infra eam. Si supra ipsam, in Triangulis* b a c *&* e d g *propter æqualia latera* b a, e d *&* a c, d g, *& angulos* a *&* d; *erunt & bases* b c, e g γ *æquales. Et in triangulo Isosceli*

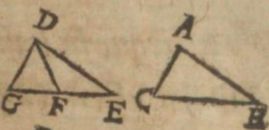
γ 4. 1.

e g f,

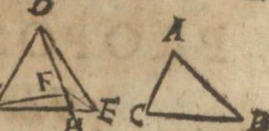
e g f, *anguli ad basin* d g f & d f g *erunt* δ *æquales: Quo angulo* d g f *cum minor sit*, e g f, *angulo autẽ* d f g *major* e f g, *utique minori* e g f *minus latus* e f, & *majori* e f g *majus latus* e g ε *subtendetur, id est, huic æqualis* b c *basis major erit basi* e f. *Sic in ipsam, necessariò* e g γ *æqualis ipsi* b c, ζ *major est basi* e f. *Denique si infra; productis* d f *in* h, & d g *in* i, *ductaq;* e g: *erit rursus* e g *basis* γ *æqualis basi* b c; *angulus item* h f g δ *æqualis angulo* f g i, *quo sanè* ζ *minor est* e g f, *adeoq;* & *angulo* e f g. ε *Ideoq; angulo* e f g *adhuc majori majus latus* e b *subtendetur quod æquale est ipsi* b c, *quàm angulo* e g f, *quod est* e f. *Sic patet propositum.*



δ 5. 1.



ε 19. 1.

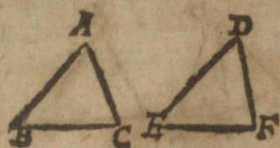


ζ 9. axio.

PROPOS: XXV.

Theorema 16.

Si duo triangula *abc*, *def*, duo latera *ab*, *ac*, duobus lateribus *de*, *df* æqualia habuerint, utrumq; utrique: basin vero *bc* basi *ef* majorem, & angulum *a* sub æqualibus rectis contentum, angulo *d* majorem habebunt.



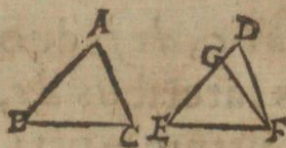
Sin minus, erit vel æqualis, atque sic contra hypothesin etiam bases b c, e f *erunt* α *æquales: vel major* d *ipso* a, *atque sic basis* e f *basi* b c *contra hypothesin* β *major. Erit itaq;* a *major quàm* d.

α 4. 1.
β 24. 1.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 17.

Si duo triangula *a b c*, *d e f*, duos angulos *b*, *c*, duobus angulis *e*, *d f e* æquales habuerint, utrumq; utriq;: unumq́; latus uni lateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis *b c*, *e f* seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: *a c* & *d f* & reliqua latera reliquis æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum *a*, reliquo *d* æqualem habebunt.



Nisi ergo a b *&* d e *sint æqualia, fiat* g e *æquale ipsi* a b, *ducaturq;* g f. *Iam cum* a b, b c *æquentur ipsis* g e, e f, *anguliq;* b *&* e *sint* α *æquales,* β *erunt & anguli æqualibus lateribus oppositi æquales,* c *&* e f g. *Cui* c *quoniam etiam* α *æqualis est* d f e, γ *erunt* d f e *totus &* g f e *partialis æquales, quod* δ *absurdum.*

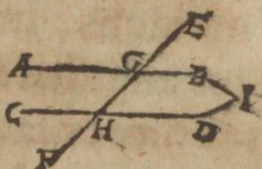
α ex hypot.
β 4. 1.
γ 1. axiom.
δ 9. axiom.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 18.

Si in duas rectas *a b*, *c d*, recta *e f* incidens, alternatim *a g h* & *g h d*, angulos inter se æquales fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ.



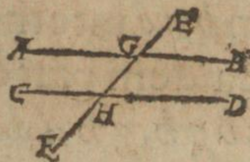
Si non sunt, α *concurrent productæ in* i: *eritque* g i h *triãgulum, cujus latere* g i *producto in* a, *angulus externus* a g h, β *major sit interno opposito* g h i; *cui tamen ex hypothesi æqualis erat. Sunt ergò parallelæ.*

α 34. def. 1.
β 16. 1.

PROPOSITIO XXIIX.

Theorema 19.

Si in duas rectas *a b*, *c d*, recta *e f* incidens, externum *a g e* angulum, interno & opposito, *c h g*, & ad easdem partes, æqualem fecerit: aut internos *a g h* & *g h c* & ad easdem partes, duobus rectis æquales, parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ.



Eidem enim a g e *æquales sunt* α h g b *&* β c h g; *hi ergo tanquam alterni inter se* γ *æquales*, δ *parallelas arguunt* a b *&* c d. *Deinde*

α 15. 1.
β ex hypot.
γ 1. axiom.
δ 27. 1.

cum

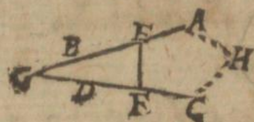
cum β a g h, *&* c h g *: itemq;* ᵋ a g h *&* h g b *duobus rectis sint æquales ; erunt, ablato communi* a g h*, anguli reliqui* h g b *&* c h g *alterni* ζ *æquales: ideoq; rectæ parallelæ.*

ε 13. l.
ζ 3. axio.

LEMMA.

Si in duas rectas *a b* & *c d*, recta *e f* incidens, internos & ad easdem partes angulos *b e f* & *d f e* duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt duo anguli duobus rectis minores.

Si versus alteram partem dicamus concurrere in h, *ubi non sunt duobus rectis minores sed majores, fierent in triangulo* e h f *duo illi anguli duobus rectis majores. Quod* α *absurdum.*



α 17. l.

PROPOS: XXIX.

Theorema 20.

In parallelas rectas *a b*, *c d*, recta *e f* incidens, & alternatim angulos æquales efficit *a g h*, *g h d*; & externum *b g e* interno & opposito *d h g*, & ad easdem partes æqualem ; & internos *b g h*, *g h d* ad easdem partes duobus rectis æquales faciet.

Si

Si quis alternos negaverit æquales, alter a g h *esto major altero* g h d. *His inæqualibus additus communis* b g h, *cum contiguo quidem* h g a *duobus rectis* α *æquantur; sed cum* g h d *duobus rectis erunt* β *minores, id est duo interni, & ita* a b, c d *non* γ *erunt parallelæ contra hypothesin. Quoniam igitur alternorum æqualium uni* a g h δ *æqualis* e g b, ε *erit etiam hic externus interno ad easdem partes opposito æqualis. Deniq; cum internus* b g h *cum externo* e g b *duobus rectis sint* α *æquales, cum eodem* b g h *alter internus* g h d *duobus rectis* ε *æquales erunt. Patet ergò propositum.*
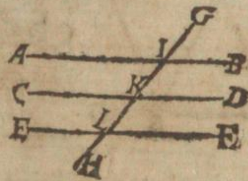


α 13. 1.
β 4. axiom.
γ 11. ax.
δ 15. 1.
ε 1. ax.

PROPOS: XXX.

Problema 21.

Quæ eidem rectæ lineæ *e f* sunt parallelæ *a b, c d*, & inter se sunt parallelæ.

Recta g h *secet illas parallelas in* i k l. *Iam in* a b, e f *parallelas incidens* g h, *facit alternos* a i h *&* i l f α *æquales.* α *Itemque externum* i k d *interno opposito* k l f, *vel* i l f; β *Erunt ergo &* a i k *&* i k d *alterni æquales, rectæq;* a b *&* c d γ *parallelæ.*



α 29. 1.
β 1. ax.
γ 27. 1.

PRO-

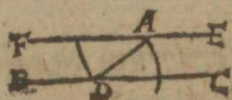
PROPOS: XXXI.

Problema 10.

Per datum punctum *a*, datæ rectæ *b c*, parallelam rectam *e f* ducere.

α 23.1. *Ducta* a d α *fiat angulo* a d c *æqualis* d a f

β 27.1. *alternus, continueturq;* f a



in e. β *Erunt illæ propter alternos æquales parallelæ.*

PROPOS: XXXII.

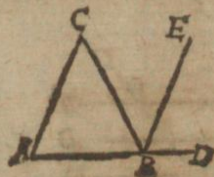
Theorema 22.

Omnis trianguli *a c b*, uno latere *a b* producto in *d*; externus angulus *c b d* duobus internis oppositis *a* & *c* est æqualis: & trianguli tres anguli, duobus rectis sunt æquales.

Lateri a c α *agatur per punctum* b *parallela* b e. *In duas ergo has parallelas* a c *&* b c *incidens*

α 31. 1. c b, *efficit alternos* c b e *&* c β *æ-*

β 29. 1. *quales ;* a d *verò linea externum* c b d *interno opposito* a. *Sic totus externus internis duobus oppositis æqualis est. Quibus si adduatur tertius internus* c b a *communis* γ *erunt tres*



γ 13. 1. *trianguli anguli duobus rectis æquales.*

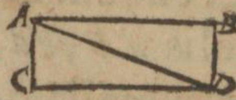
PRO-

PROPOS: XXXIII.

Theorema 23.

Rectæ lineæ *a c, d b*, quæ æquales *a b, c d* ad partes easdem conjungunt, & ipsæ æquales & parallelæ sunt.

Ducta ad *efficit alternos* b a d, a d c α *æquales, comprehensos duorum triangulorū* β *æqualibus lateribus* a b *ipsi* c d *&* a d *communi. Bases itaque* a c *&* b d *seu rectæ æquales parallelas connectentes sunt* γ *æquales : & anguli* c a d, a d b γ *æquales : qui alterni etiam parallelas easdem* a c *&* b d δ *ostendunt.* α 29. I. β ex hypot. γ 4. I. δ 27. I.

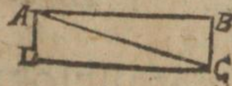


PROPOS: XXXIV.

Theorema 24.

Parallelogrammorum spaciorum *a b c d*; æqualia sunt inter se, quæ ex adverso & latera & anguli; atque illa bifariam secat diameter *a c*.

Ducta diameter a c *facit alternos* a c d *&* c a b; c a d *&* a c b α *æquales, quos angulos æquales cōmunis interjacens basis* a c *Triangulorū* a b c *&* a d c, *reliqua latera reliquis seu opposita efficit* β *æqualia, & reliquos angulos* b, d *oppositos, sicut & ex æqualibus compositi* a *&* c γ *æ-* α 29. I. β 26. I. γ 2. axiom.



quales sunt; & tota triangula a b c *&* a d c *sunt*
δ 4. l. δ *æqualia, sectum nimirum est bifariam parallelogrammum per diametrum.*

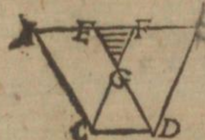
PROPOSITIO XXXV.

Theorema 25.

Parallelogramma *c d e a, c d b f,* super eadem basi *c d,* & in eisdem parallelis *a b, c d* constituta, inter se sunt æqualia.

α 34. l.
β 1. ax.
γ 2. ax.
δ ex hyp.
ε 29. l.
ζ 4. l.
η 3. axio.

Eidem c d α *æquales* a e *&* f b *inter se sunt* β *æquales, quibus eadem* e f, *addita* γ *æquales facit* a f *&* e b. *Iam triangula* f a c *&* b e d δ *æqualium laterum* a f *&* e b, a c *&* e d, *&* ε *angulorum ipsis comprehensorum* c a f, d e b *erant* ζ *æqualia, a quibus ablatum commune triangulum* e g f, *relinquit trapezia* a e g c, b f g d η *æqualia, quibus commune additum triangulum* c g d, *parallelogramma* c d e a *&* c d b f *super eadem basi in iisdem parallelis ostendit* γ *æqualia.*



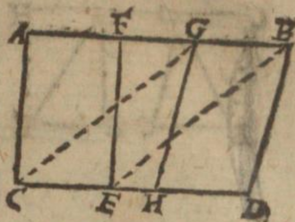
PROPOSITIO XXXVI.

Theorema 26.

Parallelogramma *a c e f, g h d b,* super æqualibus basibus *c e, h d,* & in eisdem

eiſdem parallelis *a b*, *c d* conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

Conjunctis g c, b e α *fiunt parallelogramma data eidem* c e b g, *ideoque & inter ſe* β *æqualia.*



α 35. I.
β 1. axio.

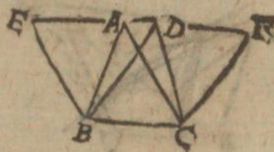
PROPOS: XXXVII.

Theorema 27.

Triangula *a b c*, *d b c* ſuper eadem baſi *b c*, & in eiſdem parallelis *b c*, *a d*, inter ſe ſunt æqualia.

Per puncta b *&* c α *ducantur parallelæ* b e, c f *ipſis* c a, b d, *quæ concurrant cum* a d *utrinq; producta. Sunt ergò ſuper eadem baſi* b c *in iiſdem parallelis conſtituta parallelogramma* b c a e, b c f d β *æqualia, ideoq; & ipſorum dimidia triangula data* γ *æqualia.*

α 31. I.



β 35. I.
γ 34. I.

PROPOS: XXXIIX.

Theorema 28.

Triangula *b a c*, *e d f*, ſuper æqualibus baſibus *b c*, *e f* conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

Iterum per puncta b, f α *ductis parallelis* b g, f h *ipsis* c a, e d; *& utrinq; continuata* a d *sunt parallelogrammum* c g *&* e h *super æqualibus basibus* β *æqualia*, *& proinde ipsorum* γ *dimidia seu data duo triangula* δ *æqualia.*

α 31. 1.
β 36. 1.
γ 34. 1.
δ 6. axiom.



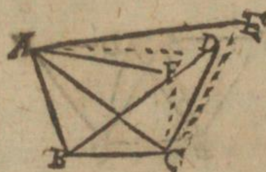
PROPOS: XXXIX.

Theorema 29.

Triangula *a b c*, *d b c* æqualia super eadem basi *b c*, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoq; sunt parallelis *b c*, *a d*.

Sin minus, α *fiat* a f *parallela ipsi* b c *& ducatur* f c. *Erunt Triangulo eidem* b a c *æqualia Triangula* β b f c *partiale &* γ b d c *totale*. *Quod* δ *absurdum*.

α 31. 1.
β 37. 1.
γ ex hypot.
δ 9. axiom.



PROPOSITIO XL.

Theorema 30.

Triangula *a b c*, *d e f* æqualia super æqualibus basibus *b c*, *e f*, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis *a d*, *b f*.

Sin

Sin minus, α *fiat* a h *parallela ipsi* b f *& ducatur* h f. *Iterum eidem triangulo* b a c *æqualia erunt triangula* β e h f *partiale & γ* e d f *totale. Quod* δ *absurdum.*



α 31. l.
β 38. l.
γ ex hyp.
δ 9. axiom.

PROPOSITIO XLI.

Theorema 31.

Si parallelogrammum ***a c d e*** cum triangulo ***b c d*** eandem basin ***c d*** habuerit, in eisdemq; fuerit parallelis ***a b***, ***c d***; duplum erit parallelogrammum trianguli.

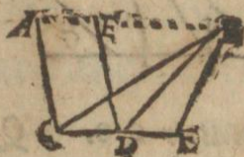
Ducatur diagonius a d. *Erit Trianguli* a c d α *æqualis Triangulo* c b d β *duplū parallelogrammum* a c d e. *Ideoq; & ipsius* c b d γ *duplum erit.*



α 37. l.
β 34. l.
γ 6. axiom.

Corollarium.

Si Triangulum ***b c f*** duplam habuerit basin ***c f***, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo ***a c d e***, erit triangulum parallelogrammo æquale.



Ducta enim b d, *ejusdem trianguli* b c d *dupla*

 sunt,

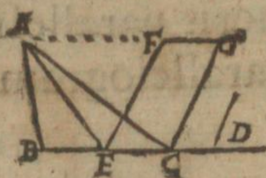
sunt, α *triangulum* e b f *&* β *parallelogrammum*
α 38. l. a c d e. *Ideoq; sunt* γ *æqualia.*
β 41. l.
γ 6. ax.

PROPOSITIO XLII.

Problema 11.

Dato Triangulo *a b c* æquale parallelogrammum, *c e f g* constituere in dato angulo rectilineo *d*.

α 10. l. α *Diviso latere* b c *bifariam in* e, β *fiat &*
β 23. l. *punctum* e *angulus angulo dato rectilineo* d *æqua-*
γ 31. l. *lis*, γ *aganturque parallelæ* a g *ipsi* b c *per* a, *&* c g *ipsi* e f *per* c; *& connectantur demum puncta* a, e.

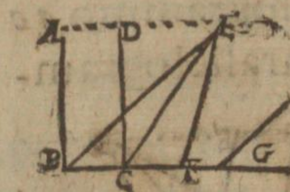


δ 38. l. *Quoniam ergo ejusdem tri-*
ε 41. l.
ζ 6. axio. *anguli* e a c *dupla sunt*, δ *triangulum* b a c *&* ε *parallelogrammum* e f g c, *erunt* ζ *æqualia.*

Conversa.

Dato parallelogrammo *a b c* d, æquale Triangulum *b e f* constituere in dato angulo rectilineo *g*.

α 23. l. α *Fiat angulus* c b e *æqualis angulo* g. *secetq;* b e *productam* a d *in* e; *& in continuum addatur ipsi* b c *æqualis* c f, *junganturq;* f e *& ducatur* c e. *Quia rursus ejusdem trianguli* b ec

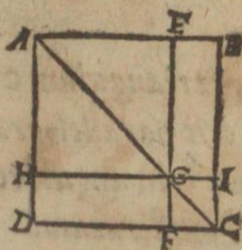


b e c *dupla sunt* β *triangulum* b e f *& parallelogrammum* a b c d, *etiam inter se sunt* δ *æqualia.* β 38. 1. γ 41. 1. δ 6. axiom.

PROPOS: XLIII.

Theorema 32.

In omni parallelogrammo *a b c d*, Complementa *d f g h*, *b e g i*, eorum quæ circa diametrum *a c* sunt, parallelogrammorum *a e g h*, *c f g i*, sunt inter se æqualia.



Ab α *æqualibus triangulis* a d c, a b c, *ablatis triangulis* α *æqualibus* a h g, a e g, *relinquuntur Trapezia* h g c d, e g c b β *æqualia ; à quibus iterum sublatis* α *æqualibus triangulis* g f c, g i c, *relinquuntur complementa duo* g b *&* g d β *æqualia.* α 34. 1. β 3. ax.

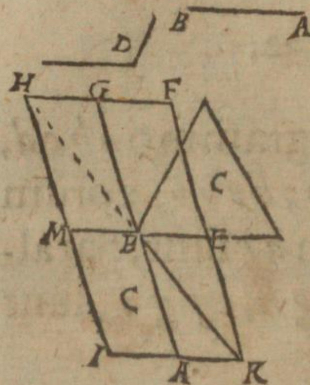
PROPOS: XLIV.

Problema 12.

Ad datam rectam *a b*, dato triangulo *c*, æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo *d*.

α 42. 1. α Fiat triangulo c æquale parallelogrammum e b f g, habens angulum e b g æqualem angulo dato d; producaturq́; g b in a, ut a b sit datæ a b æqualis; a β per punctum a ipsi e b β agatur parallela, quæ cum linea f e producta concurrit in puncto k. Per hoc & punctum b ducitur diagonius concurrens in puncto h cum g f producta: per quod ipsi a g β ducitur parallela h l, ac idemq; e f b continuatur in m. Quia .n. eidem parallelogrammo g e b f æqualia sunt, γ triangulum c & δ parallelogrammum a b m l, erit parallelogrammum a b m l ad datã lineam a b in angulo rectilineo d triangulo dato ε æquale constitutum.

β 31. 1.



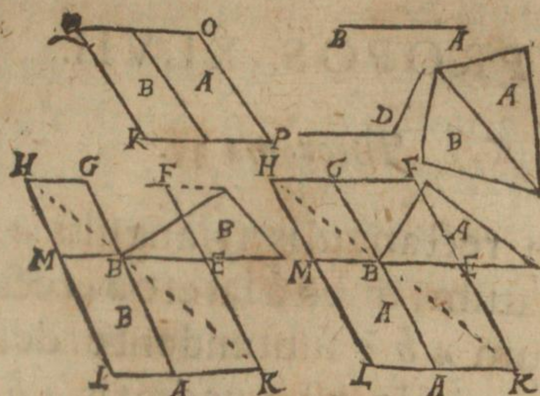
γ 43. 1.
δ 42. 1.
ε 1. axiom.

PROPOSITIO XLV.

Problema 13.

Ad datam rectam lineam *a b*, dato rectilineo *b, a*, æquale parallelogrammum *o p q r* constituere, in dato angulo rectilineo *d*.

α 44. 1. *Resoluto rectilineo dato in sua triangula,* a, b α *construantur triangulis singulis æqualia parallelogramma* a & b, *quæ deinde in linea* p r *juxta æquales*



æquales suas altitudines conjungantur. β *Erit* β 9. axiom.
totum hoc parallelogrammum toti rectilineo dato æquale, cum singulæ partes respondeant singulis.

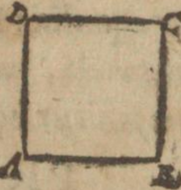
PROPOS: XLVI.

Problema 14.

A data recta linea *a b*, quadratum *a b c d* describere.

Ex alterutro termino a *lineæ datæ* α *erigatur perpendicularis* a d *æqualis lineæ datæ & per* d β *agatur lineæ* a b *parallela & æqualis* d c, *junganturq;* c *&* b. γ *Aequales & parallelas*, a b, d e, *connectentes* d a *&* c b *erunt* δ *æquales, & parallelogrammum factum* ε *æquilaterum; & propter angulos* c, b, *oppositos rectis* a d ζ *rectos, rectangulum: ideoq;* η *quadratum.*

α 11. 1.
β 31. 1.
γ ex constr.
δ 33. 1.
ε 1. axio.
ζ 34. 1.
η 26. def. 1.



PROPOS: XLVII.

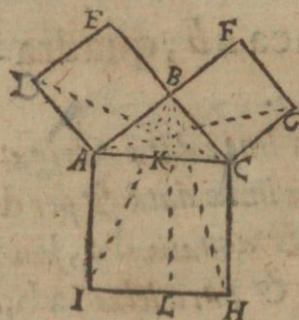
Theorema 33.

In rectangulis triangulis *a b c*, quadratum, quod à latere *a c* rectum angulum *a b c* subtendente describitur; æquale est quadratis *a b e d*, *b c g f*, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

α 46.1. β 14. l. γ 31. l.

α Descriptis tribus quadratis a h, a e, c f, *in directum β jacent lineæ* a b, b f *&* c b, b e; *γ ductaq;* b l *parallela ipsi* a i, *ducantur etiam* b h, b i, a g, c d.

δ 2. ax. ε 4. l. ζ 41. l. η 6. ax.



Addito communi angulo b a c *ad rectos* d a b *&* i a c *fiunt δ æquales anguli* i a b, d a c, *ε ipsaque triangula* d a c, i a b, *eorumque ζ dupla parallelogramma* a e *&* a l *η æqualia; eodemque modo* c f *&* c l *demonstrantur æqualia: Erunt ergo quadrata* a e, c f, *quadrato* a h, *quod ex parallelogrammis* a l *&* c l *componitur æqualia.*

PROPOS: XLIIX.

Theorema 34.

Si

Si quadratum, quod ab uno laterum *a c* trianguli *a b c* deſcribitur, æquale ſit eis, quæ à reliquis *a b*, *b c* trianguli lateribus deſcribuntur quadratis: angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus rectus eſt.



Erigatur ex b *lineæ* a b *perpendicularis* b d *æqualis ipſi* b c *&* *connectantur* a d. *Quoniam Quadrata* α a d *&* β a c *æqualia quadratis* a b, b d *itemq;* a b, b c *erunt etiam inter ſe* γ *æqualia: & ſic in triangulis æqualium laterum* a b c *&* a b d *etiam anguli* a b c *&* a b d δ *æquales erunt: quorum uno* a b d *exiſtente recto, etiam alter* a b c *rectus erit.*

α 47. 1.
β ex hyp.
γ 1. ax.
δ 8. 1.

EUCLI-



EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER II.

Definitiones.

I.



Mne parallelogrammum rectangulum *abcd* contineri dicitur ſub rectis duabus lineis, *ab*, *ad*, quæ rectum comprehendunt angulum *bad*.



2. In omni parallelogrammo ſpacio *abc* dunũquodlibet *ag* vel *gc* eorum, quæ circa diametrũ ſunt, parallelogrammorũ, cum duobus complementis *bg* & *gd* Gnomon vocetur.

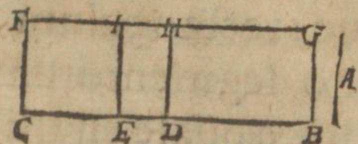
PRO-

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ ***a*** & ***b c***, seceturq; ipsarum altera ***b c*** in quotcunque segmenta ***b d***, ***d e***, ***e c***; Rectãgulum ***b f*** comprehensum sub illis duabus rectis lineis ***a*** & ***b c*** æquale est eis, quæ sub insecta ***a***, vel ***b g***, & quolibet segmentorum ***b d***, ***d e***, ***e c*** comprehenduntur, rectangulis ***b h***, ***d i***, ***e f***.

Erigatur ex puncto b *perpendicularis* b g *ipsi* a *æqualis, compleatur que rectangulum* b f *comprehensum sub* b c *&* b g. *Rursus etiam ex punctis sectionum* d *&* e α *erigantur perpendiculares* d h *&* e i β *æquales & parallelæ lineæ* g h, *ut fiant rectangula* b h, d i, e f, *quæ tanquam partes simul sumtæ æqualia sunt toti* b f *sub datis lineis comprehenso. Quod erat ostendendum.*



α 11. I.
β 31. & 34. I.

PROPOSITIO II.

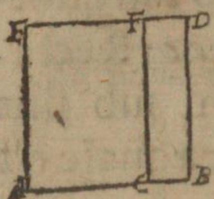
Theorema 2.

Sic recta linea ***a b*** secta sit utcunque in ***c***: rectangula ***a f*** & ***c d***, quæ sub tota, & quolibet segmentorum ***a c*** &

cb comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, Quadrato *a d*.

α 46. 1.
β 31. 1.

Super recta a b α *descibatur quadratum* a d, *&* β *ducatur per* c *ipsis* a e *&* d b *parallela & æqualis* c f. *Fiunt ergò* a f *&* c d *parallelogramma, tanquam partes simul sumtæ æqualia toti* a d *quadrato.*



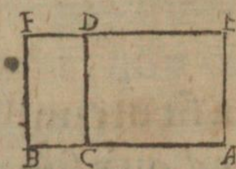
PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si recta linea *a b* secta sit utcunque: rectangulum *a f* sub tota *a b* & uno segmentorum *a c* comprehensum, æquale est illi, quod sub segmẽtis *a c*, *c b* comprehenditur, rectangulo *c f* & illi, quod à prædicto segmento *a c* describitur, Quadrato *a d*.

α 46. 1.

Ex utrovis segmento, ut a c α *fiat quadratum* a c d e, *& producta recta* e d *in* f *fiat æqualis ipsi* a b, *& connectantur* f b. *Erit* c f *rectangulum ex segmentis; & totum rectangulum* a f *æquale quadrato segmenti* a d *unà*



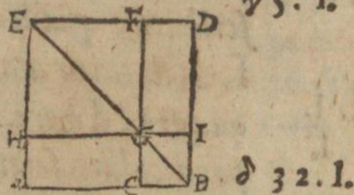
una cum illo segmentorum rectangulo, tanquam totum suis partibus simul sumtis.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si recta linea *a b* secta sit utcunque in *c*; Quadratum *a d*, quod à tota *a b* describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis *a c*, *c b* describuntur, quadratis *h f*, *c i*, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo *g a*, *g d*.

In Quadrato a d, *ex* a b *α descripto, ducatur diagonius* b e, *& ex puncto sectionis* c *β agatur ipsi* a e *parallela* c f *secans diametrum in* g *puncto, per quod parallela β fiat* h i *ipsi* a b. *Vt ergò in triãgulis Isoscelibus rectangulis* e a b *&* e d b *anguli ad basin γ æquales sunt δ semirecti; ita in triangulis* e f g *&* e h g *rectangulis, ad basin* e g *angulis existentibus δ æqualibus, etiam latera ipsis opposita æqualia fiunt, quibus similiter sua opposita sunt ε æqualia, adeoque* h f *est ζ quadratum, ut &* c i, *utrumq; videlicet sui segmenti. Horum lateribus tanquam segmentis, complementa* g a *&* g d *ζ æqualia, comprehensa sunt, quæ cum segmentorum quadratis quadrato totius sunt æqualia.*



α 46. 1.
β 31. 1.
γ 5. 1.
δ 32. 1.
ε 34. 1.
ζ 43. 1.

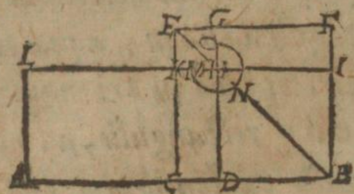
Corollarium.

In quadratis quæ circa diametrum ſunt parallelogramma, quadrata ſunt.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si recta linea *a b* ſecetur in æqualia *a c*, *c b* & non æqualia *a d*, *d b*: rectangulum *a b* ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, unà cum quadrato *k g*, quod ab intermedia ſectionum *c d* æquale eſt ei, quod à dimidia *c b* deſcribitur, quadrato *c f*.



α 46. 1. Ex c b *dimidia* α *deſcribatur quadratum* c f, *& ducatur diagonius,*
β 11. 1. *quam ex* d β *erecta per-*
γ 31. 1. *pendicularis ſecet in puncto* h, *per quod æqualis & parallela* l i γ *agatur ipſi* a b, *&* l *cum* a *conjungatur. Iam ſi rectangu-*
δ 36. 1. *lorum* δ *æqualium uni* a k *adjiciatur, complemen-*
ε 43. 1. *torum* ε *æqualium unum* c h; *alteri verò* c i *alte-*
ζ cor. 4. 1. *rum* h f, *& utriq; commune* ζ *quadratum interſegmenti* k g; *erit* a h *rectangulum inæqualium ſegmentorum unà cum illo interſegmenti quadra-*

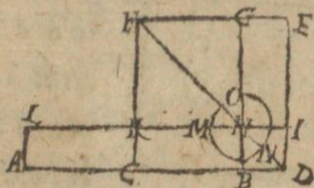
to,

to, k g *æquale gnomoni* m n o *cum eodem quadrato, seu quadrato* c f *dimidiæ* c d.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si recta linea *a b* secetur *in e,* & illi recta quædam linea *b d* in rectum adjiciatur: rectangulum *a i* comprehensum sub tota cum adjecta *a d* & adjecta *b d*, unà cum quadrato *k g* à dimidia *c b* æquale est quadrato *c e* à linea, quæ cum ex dimidia *c b* tum ex adjecta *b d* componitur, tanquam ab una descripto.



α 46.1.
β 11.1.
γ 31.1.
δ 36.&43.1
ε 1.ax.

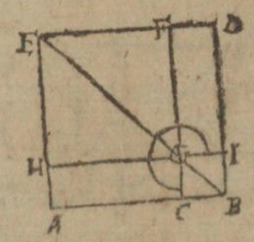
α *Describatur ex* c d *quadratum* c e *cum diametro* d f, *quam ex* b β *erecta perpendicularis intersecet in* h *puncto, per quod ipsi* a d γ *ducatur parallela & æqualis* i l. *Rectangulo eidem* c h δ *æqualibus* a k *&* h e, *addito communi* e i, ε *æqualia fiunt rectangulum* a i *& gnomon* m n o; *adeoque & aucta communi quadrato* k g.

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si recta linea *a b* secetur utcunq; *in c*, quod à tota *a b*, quodque ab uno segmentorum *b f*, utraq; simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo *a f*, *h d*, & illi quod à reliquo segmento fit, quadrato *g b*.

α 46.1. *Iterum super* a b α *describatur quadratum*
β 11.1. *& ducta diagonio ex* c β *erigatur perpedicularis* c f
γ 31.1. *& per* g *datæ* a b *parallela* γ *fiat* h i. *Cum ergo*
δ 4.11. *gnomoni* i e c m, *unà cum qua-*
ε 8. ax.



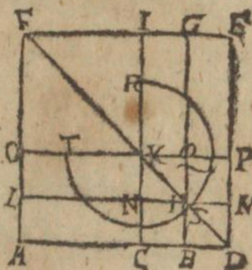
drato g b δ *æquale sit quadratum* a d; *addito communi* h f, ε *erunt quadrata* a d *ex tota*, *&* h f *ex segmento æqualia rectangulis* a f *&* h d, *sub tota & segmento comprehensis*, *unà cum reliqui segmenti quadrato* g b.

PROPOS: IIX

Theorema 8.

Si recta linea *a b* secetur utcunque

que *in e*: rectangulum *a b* quater cō-
prehensum sub tota *a b* & uno se-
gmentorum *c b*, cum eo, quod à reli-
quo segmento fit quadrato *o i* æqua-
le est ei, quod à tota & dicto segmen-
to, tanquam ab una *a d* linea descri-
bitur, quadrato *a e*.



Vtcunq; in c *secta* a b *adponatur* b d *æqualis ipsi* c b, *& α describatur quadratum* a e *super tota* a d : *ex punctis autem* c *&* b *β erigantur perpendiculares & parallelæ* c i *&* b g, *quæ diagonium* f d *secent in* k *&* h *punctis, per quæ ipsi* a d *parallelæ & æquales γ agantur. δ Aequalibus igitur parallelogrammis singulis* a n, l k, k g, q e, *ex segmentis datæ lineæ factis, si addantur singula quadrata ε æqualia ex altero segmento facta; erunt quatuor hæc rectangula ex tota & segmento & inter se ζ æqualia, & simul sumta gnomoni* r s t: *quibus si addatur quadratum* o i *ex priore segmēto* a c, *æqualia erunt quadrato* a e *facto ex tota* a b *cum segmento* b d *tanquam ab una partes simul sumtæ toti.*

α 46.1.
β 11.1.
γ 31.34.1.
δ 36.1. & 43.1.
ε 34.1.
ζ 2.ax.

PROPOS: IX.

Problema 9.

Si recta linea *a b* secetur in æqualia *a c*, *c b*, & non æqualia *a d*, *d b*: Quadrata *a d*, *d b*, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia, sunt & ejus, quod à dimidia *a c*, & ejus, quod ab intermedia sectionum *c d* fit, quadrati.

α 11.l. *Dimidiæ* a c *æqualis* α *erigatur perpendicularis* c e, *&* e *cum* a *&* b *connectatur, ut fiant duo triangula isoscelia rectangula* a c e *&* b c e, *quorum anguli ad bases* β *erunt æquales & semirecti, & totus* a e b *ex duobus semirectis rectus. Rursus erigatur ex* d *perpendicularis* d f, *&* per f *ipsi*

β 5. & 32.l.



γ 31.l. c d γ *fiat parallela & æqualis.* β *Erunt ergò in duobus rectangulis triangulis* b d f *&* e g f *semirecti ad bases, & his subtensa latera* δ *æqualia. Deniq; ducatur* a f.

δ 6.l. *In triangulo* a c e *quadratum hypotenusæ* a e, *æquale est quadratis ex* a c *&* c e, *vel duplum quadrati dimidiæ* a c, ε *itemq; quadratum* e f *duplum erit quadrati* g f *vel* c d *intermediæ: ac proinde quadrata* a e *&* e f *simul sumta erunt dupla quadratorum* a c *dimidiæ &* c d *intermediæ.*

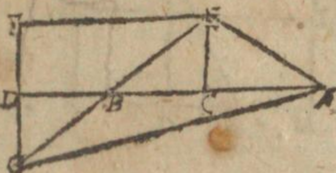
ε 47.l. *Cumq; quadratum* a f ε *æquale sit, & quadratis* a e *&* e f *simul sumtis; & quadratis* a d *&* d f *vel* d b *inæqualium segmentorum; erunt hæc quadrata inæqualium segmentorum dupla quadratorum ex dimidia & intermedia. Quod erat propositum.*

PRO-

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si recta linea *a b* secetur bifariam *in c*; adjiciatur autem ei in rectū quæpiam recta linea *b d*: quod à tota cum adjuncta & quod ab adjuncta, utraque simul quadrata *a d* & *b d*, duplicia sunt & ejus, quod à composita ex dimidiâ & adjuncta, tanquam ab una *c d*, descriptum sit, quadrati.



Iteram ex c *α erecta perpendiculari* c e *æquali ipsi* a c, *fiant duo triangula Isoscelia* a ç e *&* b c e, *in quibus anguli ad bases β æquales & γ semirecti. Deinde compleatur rectangulum* c f, *productæq;* f d *&* e b *concurrant in* g, *&* g *connectatur cum* a. *Erunt triangula rectangula* e f g *&* b d g *etiam Isoscelia, & anguli ad bases semirecti. Est ergò quadratum* a e *δ duplum quadrati* a c, *& quadratum* e g *quadrati* e f *vel* c d, *quadratum* a g *quadratis* a e *&* e g *est δ æquale; idemq; quadratum* a g *etiam δ æquale est quadratis* a d *totius cum adjecta &* d g *adjecta: ideoq; etiam hæc duo quadrata to-*

α 11.1.
β. 5. 1.
γ 32.1.
δ 47.1.

tius cum adjecta & adjectæ erunt dupla quadratorum dimidiæ & dimidiæ cum adjecta.

PROPOS: XI.

Problema I.

Datam rectam lineam *a b* secare, ut comprehensum sub tota *a b* vel *b c*, & altero segmentorum *g b* rectāgulum *gc*, æquale sit ei, quod *a* reliquo segmento *a g* fit, quadrato *a h*.

α 46.1. *Super* a b *data* α *describatur quadratum* a c; *&* *latus* a d β *secetur bisariam in*e, *ductaq;* e b *fiat æqualis* e f; *& super* a f α *fiat quadratum, continuata* h g *in* i. *Cum ergò rectangulum* d h *super tota cum adjecta & adjecta, unà cum quadrato dimidiæ* γ *æquale sit quadrato*
γ 6.II. *ex demidia & adjecta* e f *vel* e b, *quod* δ *æquale*
δ 47.I. *est quadratis* e a *dimidiæ &* a b *totius; ablato communi quadrato* e a, *erunt quadratum* d b *ex tota* a b, *& rectangulum* d h *ex tota cum adjecta & adjecta* ε *æqualia: rursusq; ablato*
ε 3.ax. *recta ngulo communi* a i *ex tota & adjecta, relinquitur quadratum* a h *adjectæ, vel alterius segmen-*

β 10.1.

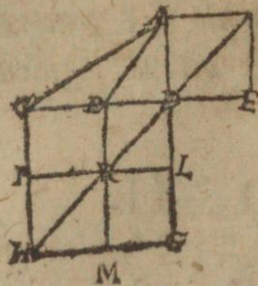
segmenti a g *aequale rectangulo* g c *comprehenso sub data recta* a b *& altero segmento* g b.

PROPOSITIO XII.

Theorema II.

In amblygonijs triangulis *a b c*, quadratum quod fit à latere *a c* angulum obtusum *a b c* subtendente, majus est quadratis, quæ fiunt à lateribus *a b*, *b c*, obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo *c k* bis comprehenso & ab uno laterum *c b*, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod cum protractum fuerit, cadit perpendicularis *a d*, & ab assumta *b d* exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

Ex puncto a *α demittatur perpendicularis* a d *in latus* c b *protractum. Quadratum ex* c d *β aequale est quadratis segmentorum* c b *&* b d, *unà cum rectangulo bis sub segmentis* α 12. 1. β 4. II.



ſumto: quibus ſi addatur commune quadratum perpendicularis a d, *y erunt tria quadrata ex ſegmentis & perpendiculari, unà cum rectangulo bis ſub ſegmentis æqualia duobus quadratis ex* c d *&* a d, *qui-*

y. 2. ax. ~~8 47.1.~~

δ 47.1. *bus δ æquale eſt quadratum* a c. *Cumq; quadratum* a b *tantùm ſit δ æquale quadratis* a d *&* b d, *erit quadratum* c a *majus quadratis laterum obtuſum angulum includentium rectangulo bis ſub uno laterum* c b *& aſſumta* b d *comprehenſo.*

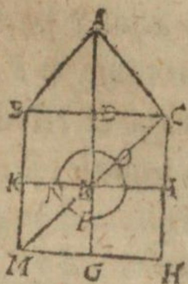
PROPOS: XIII.

Theorema 12.

In oxygonijs triangulis *a b c* quadratum à latere *a b* angulum acutum *a c b* ſubtendente minus eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus *a c*, *b c* acutum angulum comprehendentibus, rectangulo *b i* & *d h*, bis comprehenſo & ab uno laterum *b c*, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpẽdicularis *a d* cadit, & ab aſſumta interius linea *d c* ſub perpendiculari prope acutum angulum.

Demi-

a Demittatur perpendicularis a d *in latus* b c *angulo dato* c *adjacens. Est quadratum rectæ* a b β *æquale quadratis* a d *&* b d: *quadrato autem* b d *maius est quadratum rectæ* b c, *gnomone* n o p: *quadratum verò* a c β *æquale est quadratis* a d *&* d c, *majus nimirum quadrato* a d *per quadratum* d c. *Sic ergo quadratum rectæ* a b *minus est quadratis rectarum* b c *&* c a, *rectangulo bis sumto sub tota* b c, *& segmento* d c, *id est, rectangulis* b i *&* d h. α 12.1. β 47.1.

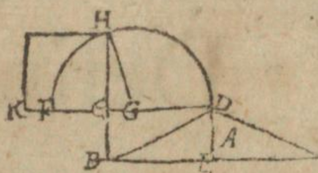


PROPOS: XIV.

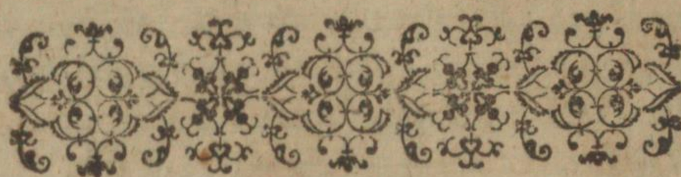
Problema 2.

Dato rectilineo *a*, æquale quadratum *ei* constituere.

a Fiat rectilineo a, *æquale rectangulum* b c d e; *extendaturq; latus* d c *in* f, *intervallo* c b, *ipsaq;* d f β *secetur bifariam in* g, *& ex* g *intervallo* g d *vel* g f *describatur semicirculus* d h f, *producta* b c *in* h. *Cum ergò recta* d f *secta sit æqualiter in* g *& inæqualiter in* c, *erit rectangulum* e c *sub* d c *&* c f, *unà cum quadrato* g c α 45.1. β 10.1.



y 5. II. *γ æquale quadrato rectæ* g f *&* g h. *Quadrato*
δ 47. I. *autem* g h *δ æqualia sunt quadrata* g c *&* c h.
Ergò & rectangulum e c *unà cum quadrato* g c,
ε ax. *ε æquale est quadratis rectarũ* g c *&* c h. *Ablato communi quadrato* g c; *remanebunt æqualia rectangulum* e c *vel* a, *& quadratum rectæ* c h. *Quod erat faciendum.*

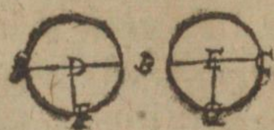


EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER III.

Definitiones.

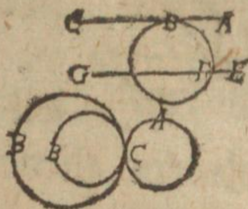
I.



ÆQUALES circuli sunt *afb*, *bgc*, quorum diametri *ab*, *bc* sunt æquales; & quorum quæ ex cen-

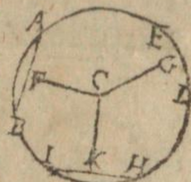
centris rectæ *d f*, *e g* ſunt æquales.

2. Recta *a b c* circulum *b f d* tangere dicitur; quæ cum circulum tangit *in b*, ſi producatur, circulum nō ſecat.

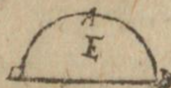


3. Circuli ſeſe mutuò tangere *in c* dicuntur, qui ſeſe mutuò tangentes, ſeſe mutuò non ſecant.

4. In circulo *a b d* rectæ *a b*, *h i* æqualiter à centro *c* diſtare dicuntur; cum perpendiculares *c k*, *c f*, quæ à centro *c* in ipſas ducũtur, ſunt æquales. Longius abeſſe illa dicitur *d e*, in quam major *c g* perpendicularis cadit.



5. Segmentũ *e* circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, *b d* & circuli peripheria *b a d* comprehenditur.



6.Se-


6. Segmenti angulus *b a c* eſt, qui ſub rectalinea *a c* & circuli peripheria comprehenditur.

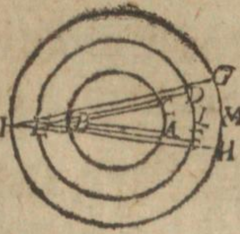

7. In ſegmento angulus eſt, cum in ſegmenti peripheria ſumtum fuerit quodpiam punctum *b*, & ab illo in terminos rectæ *a*, *c*, qui ſegmenti baſis eſt, adjunctæ fuerint rectæ lineæ; angulus *a b c*, ab adjunctis illis comprehenſus.


8. Cum verò comprehendentes angulum rectæ *d a*, *b a* aliquam aſſumunt peripheriam; ille angulus *b a d* peripheriæ *d b* inſiſtere dicitur.


9. Sector Circuli eſt, cum ad ipſius circuli centrum *e* conſtitutus fuerit angulus *a e c*: eſtque figura comprehenſa à rectis *a e*, *e c* angulum continentibus, & à peripheria *a d c* ab illis aſſumta.

10. Similia circuli ſegmenta ſunt, quæ

quæ angulos capiunt æquales: aut in quibus anguli *b*, *e*, *i*, inter se sunt æquales. Ita arcus vel circumferẽtiæ *a k c*, *d l f*, *m h i* similes dicuntur, quibus æquales anguli insistunt.



PROPOSITIO I.

Problema 1.

Dati citculi *a b c* centrum *f* invenire.

Ad ductam in circulo rectam ac, α *bifariamq; sectam in* e, β *erigatur perpendicularis, quæ utrinq; in peripheriam terminata, etiam* α *secetur bifariam in* f, *centro circuli. Sin minus, cum in illa recta aliud esse non possit, extra ipsam ponatur* g; *ducanturq;* g f a, g c, g e. *Quia ergò æqualia sunt in triangulis* a g e. *&* e g c *omnia latera* γ a g, g c; δ *a* e, e c; *&* g e *commune*; ε *æquales etiam erunt anguli* a e g, c e g *& recti; totus* a e g *parti* f e a, *æqualis.* ζ *Quod absurdum.*

α 10. 1.
β 11. 1.
γ 15. de f. 1.
δ ex constr.
ε 8. 1.
ζ 9. ax.



Corollarium.

Si recta rectam ad angulos rectos

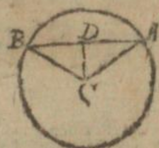
ctos in circulo æquibisecet, in secante centrum erit circuli.

PROPOSITIO II.

Theorema 1.

Si in circuli peripheria duo quælibet, puncta accepta fuerint, recta linea *ab* quæ ad ipsa puncta adjungitur, intra circulum cadet.

α 16.1.



In recta ab *assumatur quodcunque punctum* d *& ducantur ex centro* c a, c b, c d. *Cum ergo angulus* c d a α *major sit angulo* c d b β *seu angulo* c a d; *erit etiam* c a *semidiameter* γ *major linea* c d. *Ideoque & punctum* d, *& quævis alia intermedia puncta lineæ* a b *cadunt intra circulum.*

β 5.1.
γ 19.1.

PROPOSITIO III.

Theorema 2.

Si in circulo *b c d* recta quædam linea *c e* per centrum extensa, quandam non per centrum extensam *b d* bifariam secet *in f*, eam ad angulos rectos secabit. Et si ad angulos re-

ctos

ctos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

Quia enim in Triangulis a f b, a f d *laterum α æqualium etiam lateribus æqualibus oppositi anguli sunt β æquales, erunt* a f b, a f d *γ recti*



α ex const. & 15. def. 1.
β 8. 1.
γ 10. def. 1.

PROPOSITIO IV.

Theorema 3.

Si in circulo duæ rectæ lineæ *a b*, *c d* sese mutuò secent *in e*, non per centrum extensæ; sese mutuò bifariam non secabunt.

Quod si bifariam se secarent; tum ex centro f *ducta recta* f e *utramq; secaret ad angulos rectos β æquales in α partemq; toti æqualem efficeret. Quod est γ absurdum.*



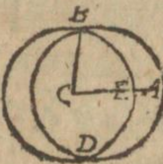
α 3. III.
β 10. def. 1.
γ 9. ax.

PROPOSITIO V.

Theorema 4.

Si duo circuli *a b d*, *b e d* sese mutuò secent *in b & d*; non erit illorum idem centrum *c*.

Si centrum commune esset c, *ductis lineis*, c b *&* c a *erunt* c b, c e *&* c a *α æquales, pars toti. Quod β absurdũ.*



α 15. def. 1.
β 9. ax.

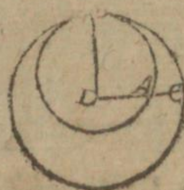
PRO-

PROPOSITIO VI.

Theorema 5.

Si duo circuli *a b*, *c b* ſeſe mutuò interius tangant *in b*; eorum non erit idem centrum *d*.

α 15.def.1.
β 9 ax.



Si centrum commune eſſet d, *ductis lineis* d b *&* d a c, *erunt* d b, d a, *&* d c α *æquales, pars toti. Quod* β *abſurdum.*

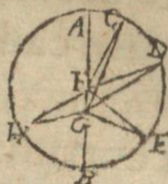
PROPOSITIO VII.

Theorema 6.

Si in diametro circuli *a b* quodpiam ſumatur punctum *g*, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto *g* in circulum quædam rectæ lineæ *g c*, *g d*, *g e* cadant: maxima quidem erit ea *g a* in qua centrum; minima verò reliqua *g b*; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum *f* ducitur, remotiore ſemper major *g a* *ipſa g c, & hæc ipſa g d*: duæ autem ſolùm rectæ æquales *g h*, *g e* ab eo puncto

ctog in circulum cadunt ad utrasq; partes minimæ *g b* vel maximæ *g a*.

Ex centro f *ducantur semidiametri* f c, f d, f e, f h, α *ponaturq;* *angulo* e f b *æqualis* b f h, *& ducatur recta* g h. *Quia enim* f c *&* f g. β *hoc est*, g a, γ *majores sunt latere* g c; δ *hoc latere* g d, *quia in triangulis æqualium laterum majori angulo subtensum;* δ *hoc rursus latere* g e: *Quia etiam* e f, *hoc est*, f b ε *minor est* f g *&* g e *simul sumtis, ablato communi* f g, *etiam* g e *major erit* g b: *adeoq; maxima est* g a *minima* g b; *reliquæ quo viciniores minimæ, eò sunt minores. Quia deniq; in triangulis* e f g *&* g f h *æqualium laterum æquales angulos comprehendentium, bases* g e *&* g h *fiunt æquales; ex utraque parte minimæ* g b *æqualiter distantes sunt æquales: Reliquæ omnes sunt vel minores versus* b, *vel majores versus* a. *Quod erat propositum.*



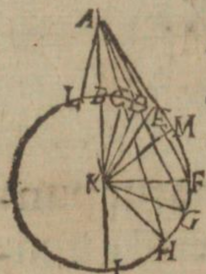
α 23.1.
β 15. de f. 1.
γ 20. 1.
δ 4+. 1.
ε 20. 1.

PROPOS: IIX.

Theorema 7.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam *a*, adeoque ad circulum ducantur quædam rectæ *a b*, *a c*, *a d*, *a e*, quarum una quidem *a b* per

centrum *k* protendatur; reliquæ verò utcunque: in concavam peripheriam cadentium rectarum *af*, *ag*, *ah*, *ai*, maxima quidem est ea *ai* quæ per centrum ducitur; aliarum autē propinquior *ah* illi *ai*, quæ centrum transit remotior *ag* semper major est; in convexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum, minima quidem est illa *ab* quæ inter punctum *a* & diametrum *bi* interponitur; aliarum autem ea, *ac*, quæ propinquior est minimæ, remotiore *ad* semper minor est. Duæ autem tantùm rectæ lineæ *ac*, *al* æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ *ab* vel maximæ *ai*.



Ex centro k *ducantur semidiametri ad singula sectionis puncta; α fiatq; angulus* a k c *angulo* a k l *æqualis.*

α 23. 1.

Quia enim rectæ a k, k h *ve[...]* a i β *major est recta* a h; *atq; ita* a h γ *major quàm* a g, *& hæc quàm* a f, *maxima itaq; est* a i, *& reliquæ quò remotiores ab ea, hoc* γ *minores. Contra cum* a k β *minor sit*

β 20. 1.
γ 24. 1.

fit quàm a c *&* c k, *ablatis æqualibus* k b *&* k c; *relinquetur* a b *minor quàm* a c. *Ita, cum* [d] *minores sint* a c *&* c k; *quã* a d, d k *& hæ* [d] *minores quàm* a e, e k, *hæ quàm* a m, m k, *demtis æqualibus semidiametris, relinquentur* a d *minor quàm* a e, *& hæc quàm* a m, *atq; ita illorum minima est* a b. *Deniq; quia in triangulis* a k c *&* a k l *sub æqualibus lateribus comprehenduntur, anguli ad* k *æquales, illis* [e] *æqualia opponuntur latera* a l *&* a c, *quibus nulla alia æqualis ex eodem puncto ad circumferentiam illam duci potest. Quod erat demonstrandum.*

d 21. I.

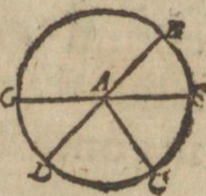
e 4. I.

PROPOS: IX.

Theorema 8.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod *a*, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

Sin minus a *fuerit centrum, esto* e, *& per* e a *ducatur diameter* f g, *Ex puncto ergò* a *duæ ad summum rectæ ad circumferentiam* [a] *æquales cadere poterunt; tertiaq; vel major vel minor erit. Quod est contra hypothesin præter* a *ergò aliud centrum non erit.*

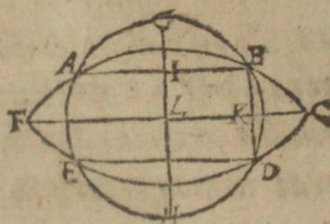


a 7. III.

PROPOSITIO X.

Theorema 9.

Circulus *a b c d e f* circulum *a g b d h e* in pluribus quàm duobus punctis non secat.



Secent se, si poßibile est in tribus punctis a, b, d *duo circuli, qui rectis* a b, b d *connectantur, per quarum puncta media* i *&* k β *erigantur perpendiculares* i l *&* k l. γ *Erit communis illarum intersectio* l *centrum utriusque circuli. Quod est* δ *absurdum.*

α 10. l.
β 11. l.
γ 1. III.
δ 5. III.

PROPOSITIO XI.

Theorema 10.

Si duo circuli *c, d* sese intus contingant *in e*, atque accepta fuerint eorum centra *a, b*, ad eorum centra adjuncta recta linea *a b* & producta in contactum *e* circulorum cadet.

Si in recta a e *centrum* b *non fuerit, ponatur in* f, *& ducatur linea* a f g h, *Erunt* f e *&* f g,

a e &

ac & ah α æquales. Cumq́ fe & fa β æquales ipsis af, fg, γ majores sint quàm ae seu ah; erit pars ab major tota ah. Quod δ absurdum.



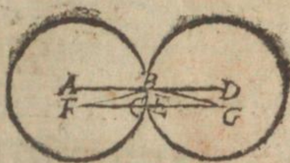
α 15. def. I.
β 2 ax.
γ 20. I.
δ 9. ax.

PROPOSITIO XII.

Theorema 11.

Si duo circuli sese exterius contingant *in b*, linea recta *a d* quæ ad centra eorum adjungitur, per contactum *b* transibit.

Sin minus recta connectens centra per contactum b *transit, esto* fg, *& connectantur* bf, bg. α *Erunt hæ duæ vel* ge, fc *majores quàm* fg, *pars toto. Quod* β *absurdum.*



α 20. I.
β 9. ax.

PROPOS: XIII.

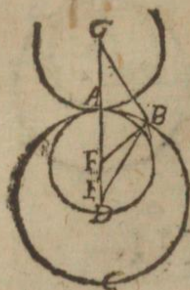
Theorema 12.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm uno α sive intus sive extra tangat.

Recta per centra e f α *cadit in contactum* a; *si præter* a *ponatur aliud contactus punctum* b,

α. 12. III.

 quod



β 20.1.
γ 5.ax.

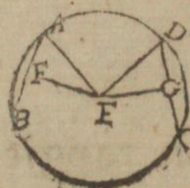
quod connectatur cum utroque centro f *&* e. *Cum ergò* b f, f e *sint* β *majores quàm* e b, *id est* e a, *ablata communi* e f, γ *major erit* f b *quàm* f a *&* *punctum* b *cadet extra circulum interiorem, ubi nullus fit contactus. Sic tangent se duo circuli exterius itidem in* a; *recta connectens centra* α *cadit in contactum* a: *Sin etiam in* b *fieret contactus, tum* b g *&* b e *fierent* δ *æquales lineæ* e a g. *Quod* β *absurdum.*

δ 15.def.1.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 13.

In circulo æquales rectæ *ab, dc* æqualiter distant à centro *e*, & quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.



α 12.1.
β 3.III.
γ 15.def.1.
δ 47.1.
ε 3.ax.

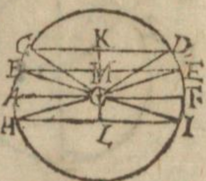
In rectas a b, d c *æquales ex centro* e α *ducantur perpendiculares in* f *&* g *illorum puncta* β *media, item* e a, *&* e d γ *æquales. Quia ergò quadrata ex* e a, e d *æqualia, quadratis* a f, e f *&* d g e g *sunt* δ *æqualia; ablatis æqualib. quadratis laterum* β *æqualium* a f, d g; *residua quadrata* ε *æqualia, erunt æqualium laterum* e f, e g *qua-*

e g *quadrata, id est, inscriptæ æquales æqualiter à centro distant.*

PROPOS: XV.

Theorema 14.

In circulo maxima quidem linea est diameter *af*; aliarum autem propinquior *h i* centro *g* remotiore *c d* semper major est.



In lineas h i, cd *ex centro* g α *ducãtur perpẽdiculares* g l gk; *ipsiq;* g l *æqualis* gm *abscindatur de* g k, *& per* m β *erigatur perpendicularis ipsi* h i γ *æqualis; ducãturq; semidiametri in puncta* b, c, d, e. *Cum ergò* g b, g e, *id est*, a f δ *majores sint, quàm* b e, *& angulus* b g e ε *major angulo* c g d; *erit* a f δ *major quam* b e, *&* ζ b e *seu hi est major quàm* c d. *Quod erat ostendendum.*

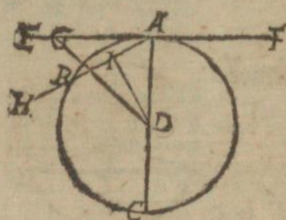
α 12.l.
β 11.l.
γ 14.l.
δ 20.l.
ε 9.ax.
ζ 24.l.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 15.

Quæ se ab extremitate cujusq; dia-

metri *ca* circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam *ae* & peripheriam comprehensum, altera linea non cadet: & semicirculi quidem angulus *dab* quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem *bae* (contactus) minor.



Sumatur in linea a e *punctum* g *& connectatur cum centro* d. *Erit angulo* α *recto* a *oppositum latus* d g, *quàm* d a, *oppositum* β *acuto* g γ *majus* g, *punctumq;* g *cum cæteris omnibus illius lineæ extra circulum. Deinde ducta alia* a h *infra ipsam* a e, δ *demittatur in ipsam perpendicularis* d i. *Angulo itaq;* i *recto opponetur* δ *majus latus* d a, β *acuto* d a b *minus* d i. *Ideoq;* i *punctum intra circulum cadit, & linea illa circulum secat, nec ulla inter Tangentem & circulum alia duci potest. Proinde neque minor erit angulus, angulo contactus* e a b; *nec major angulo semicirculi seu corniculari* d a b *inter quosvis rectilineos.*

α ex hypot.
β 17. l.
γ 17. l.
δ 12. l.

Corollarium.

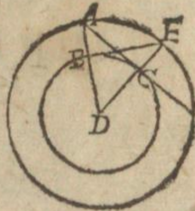
Recta tangens circulum, in unico

nico extremo diametri puncto tangit.

PROPOSITIO XVII.

Problema 2.

A dato puncto *a* rectam *a c* ducere, quæ datum circulum tangat *in in c.*



Dati circuli centrum d *connectatur cum* a *& ex intersectionis puncto* b *α erigatur perpendicularis infinita, & ex centro* d *intervallo* d a *descriptus circulus secet infinitam illam in* e, *quod cum centro* d *connexum, secat circulum datum in* c *puncto, ad quod ex* a *ducta recta* a c *tangit circulum.* α 11.I.
Sunt enim in triangulis a c d *&* d b e *β æqualium laterum cum angulo comprehenso communi* d, *etiam reliqui anguli reliquis γ æquales, δ recto* b, *rectus* c: *ε Ideoq;* a c *Tangens. Quod erat faciendum.* β 15. def.I. γ 4. I. δ 12. def.I. ε 16. III.

PROPOSITIO XIIX.

Theorema 16.

Si circulum tangat recta quæpiam

linea *a b*, à centro *e* autem ad contactum *c* adjungatur recta quædam linea *e c*: quæ adjuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.



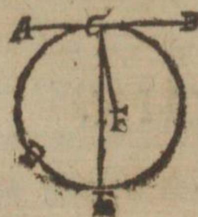
α 19.I.
β 9.ax.

Si angulus e c b *non est rectus, esto* e f c *rectus. Hujus ergò oppositum latus* e c *vel* e d *erit* α *majus quàm* e f *pars toto. Quod* β *absurdum.*

PROPOSITIO XIX.

Theorema 17.

Si circulum *d* tetigerit recta *a b* quæpiam linea à contactu autem *c* recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur; in excitata erit centrum circuli.



α 18.III.
β ex constr. & hypot.
79.ax.

Si centrum non est in c e, *esto extra illam* f, *quod cum* c α *perpendiculari linea connectetur.* β *Erunt ergò* e c b *rectus &* f c b *pars recti æqua. Quod absurdum.*

PRO-

PROPOS: XX

Theorema 18.

In circulo *a b c* angulus ad centrum *b d c* duplex est anguli *a*, *e*, *f* ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria *b c* basis angulorum.

Primo si latus b a *sit commune cum* b d; α *erit externus* b d c *internorum* β *æqualium alterius* b a c, *anguli ad peripheriam duplus.* α 32. 1. β 5. 1.



Deinde includant duæ b a, a c *duas* b d, d c *& ducatur diameter* e g; γ *Erunt rursus* b d g, g d c *dupli duorum* b e g, g e c; *totiusq;* b d c, *totius* b e c. γ 32. & 5. 1.

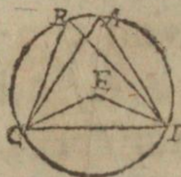
Tertiò f c *secet latus* b a, *& ducatur diameter* f h. γ *Erit similiter angulus externus totus* h d b *duplus interim totius* h f b; *sic etiam externus* h d c *auferendus ex toto* h d b *duplus est anguli* c f h, *etiam à suo toto* h f b *auferendi. Reliquus ergo ad centrum* c d b *est reliqui ad peripheriam* c f b *duplus. Quod erat demonstrandum.*

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

In

In circulo, qui in eodem segmento *d a c* sunt, anguli *a, b,* sunt inter se æquales.

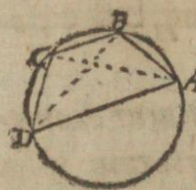


α 20.III. *Ductis semidiametris* e d, e c: *Quia angulus* e *utriusq;* a *&* b *du-*
β 7.ax. *plus est, erunt* β *æquales.*

PROPOS: XXII.

Theorema 20.

Quadrilaterorum *a b c d* in circulis descriptorū *b a d, bcd* anguli, qui ex adverso *a, c* duob. rectis sunt æquales.



Ducantur diagonij a c, b d. *Cùm ergò trianguli* b c d *tres an-*
α 32.I. *guli duobus rectis sint* α *æquales, par-*
β 21.I. *tesq; anguli* a *sint duobus ad basin* β *æquales,* c a d *&* c b d; c a b *&* b d c; *erunt etiam oppositi* a *&* c *duobus rectis æquales.*

PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Super eadem recta linea *a b,* duo segmen-

segmenta circulorum similia, & inæqualia non constituentur ad easdē partes.

Ductis a c d, c b, d b: *Erunt in* α *similibus segmentis anguli* c *&* d β *æquales. Quod* γ *absurdum.*



α ex hypot.
β 10. def. III.
γ 16. I.

PROPOS: XXIV.

Theorema 22.

Super æqualibus rectis lineis *a b*, *c d*, similia circulorum segmenta, sunt inter se æqualia.

Propter bases enim a b, c d α *æquales congruentes, congruere sibi debent ipsa segmenta* a e b, c f d. *Sin minus, erunt vel inæqualia, sed non* β *similia contra hypothesin: vel circulus circulum in pluribus,* a, g, b *quàm duobus punctis secabit. Quod* γ *absurdum.*



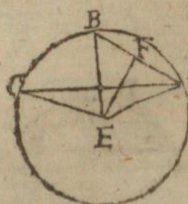
α 8. ax.
β 23. III.
γ 10. III.

PROPOS: XXV.

Problema 3.

Circuli segmento *a b c* dato, describere circulū, cujus est segmentū.

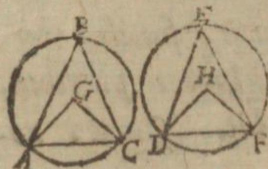
α Secetur basis a b segmenti bifariam per line-
α 10.l. β cor. 1.III. am, quæ centrũ circuli β continebit. α secetur itẽ alia
inscripta a b bifariam per aliam li-
γ 21. I. neam, quæ priorem secabit in e cen-
δ 4.l. tro. Vel ad a ipsi a b e angulo γ fiat
ε 9.III. æqualis b a e ductis a e & e c; e-
runt tres lineæ a e, ec, eb δ æquales
& e ε centrum circuli.



PROPOSITIO XXVI.

Theorema 23.

In circulis æqualibus, æquales anguli æqualibus peripherijs *df*, *a c* insistunt; sive ad centra *g*, *h*, sive ad peripherias *b*, *e* constituti insistant.



Ducantur rectæ a c, d f
α 4. l. α æquales. β Erunt ergò æqua-
β 20. III. les g & h ad centra γ æqualiũ
γ 7. ax. b, e ad peripheriam dupli & se-
δ 10. def. III gmenta a b c, d e f δ similia;
ε 24. III. & super æqualibus basibus a c, d f ε æqualia.
ζ 3. ax. Aequalibus ergò peripherijs a b c, d e f, ablatis ex totis circulis æqualibus, relinquentur peripheriæ a c, d f ζ æquales. Quod erat propositum.

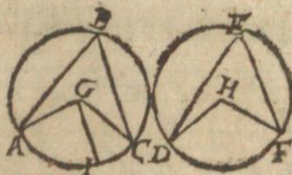
PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 24.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs *ac*, *df* insistunt, sunt inter se æquales, sive ad centra *agc*, *dhf*, sive ad peripherias *b*, *e* constituti insistunt.

Sin minus, esto angulus g *angulo* h *major, cui æqualis* α *fiat* a g i. *Erunt ergò etiam bases* a i *pars & d f vel* a c *totum* β *æqualia. Quod* γ *absurdum.*



α 23. I.
β 26. III.
γ 9. ax.

PROPOS: XXIIX.

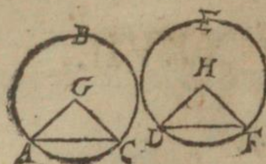
Theorema 25.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ *a c*, d *f* æquales peripherias auferunt, majorem quidem *a b c* majori *d e f*, minorem autem *a i c* minori d *k f*.

Ex terminis linearum inscriptarum æqualium ducantur semidiametri, α *Erunt ergò anguli* g, h *æquales, qui etiam æqualibus* α 8. I.

libus

β 26.III.
γ 3. ax.



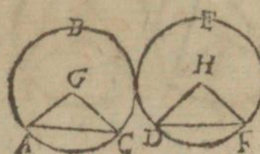
libus β *insistunt peripherijs* a i c, d k f. *Quibus ablatis ab æqualibus circulis, reliquæ peripheriæ sunt* γ *æquales* a b c, d e f.

PROPOS: XXIX.

Theorema 26.

In æqualibus circulis, æquales peripherias *a b c*, *d e f* æquales rectæ lineæ *a c*, *d f* subtendunt.

α 27.III.
β 4.I.



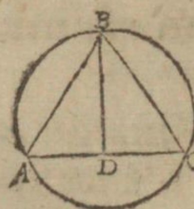
Ductis semidiametris a g, g c, d h, h f. *Erunt* α *æqualibus angulis* g *&* h *oppositæ bases* a c, d f *inter se* β *æquales. Quod erat propositum.*

PROPOS: XXX.

Problema 4.

Datam peripheriam *a b c* bifariam secare.

α 11.I.
β 4.I.
γ 28. III.



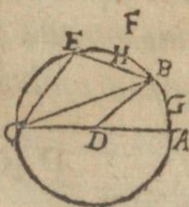
Ex puncto medio d *subtensæ* a c α *erigatur perpendicularis* b d *& ducantur* b c, b a, *quæ inter se* β *æquales etiam* γ *æquales peripherias* a b *&* b c *subtendunt. Secta ergò est peripheria bifariam in* b.

PRO-

PROPOS: XXXI.

Theorema 27.

In circulo angulus *abc* qui in semicirculo *ac* rectus est: qui autem in majore segmento *bac*, minor recto: qui verò *bec* in minore segmento, major est recto. Et insuper angulus *gbc* majoris segmenti, recto quidem major est, minoris autem segmenti angulus *h b c* minor est recto.



Quoniam α *æquales sunt anguli* dab, abd *&* dbc, bcd; *erunt bini conjuncti, binis* β *æquales*, abc *&* bac *cum* acb, *quibus duobus* γ *æqualis est externus* cbf; *ac proinde* abc *est* δ *rectus*: *Angulus autem* a *in majori segmento recto* ε *minor. Sed angulus* e *in segmento minori recto* ζ *major. Cum deniq; angulus* abc *rectus sit tantùm pars anguli segmenti majoris* gbc; *&* *angulus segmenti minoris* cbh *tantùm pars recti* cbf; η *erit ille major, hic minor recto.*

α 5.1.
β 4. ax.
γ 23.1.
δ 13.1.
ε 17.1.
ζ 22. III.
η 9. ax.

PROPOS: XXXII.

Theorema 28.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea *a b*, à contactu *c* autem producatur quædam recta linea *ce* circulum secans: angeli *a c e*, *e c b* quos ad contingētem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis *d* & *g*.

α 31. III. & 18. III.
β 32. I.
γ 21. III.
δ 3. ax.

Ducantur c f *diameter &* f e. *Cum* α *recti sint anguli* c e f, f c a, *&* e f c, e c f *recto* β *æquales; ablato communi* e c f, *anguli* e f c, γ *id est* e g c *in majori segmento, &* a c e *erunt æquales. Horum æqualium* δ *æqualia erunt complementa ad duos rectos, anguli* e c b *&* d *in segmento minore æquales.*

PROPOS: XXXIII.

Problema 5.

Super data recta linea *a b* describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo *c*.

α 23. I.
β 11. I.

Super recta ab α *fiat ad* a *angulo* c *dato æqualis* d a b, β *erigaturq; perpendicularis* a e *ex* a *ipsi* ad *& rursus angulo* e a b *æqualis fiat* a b f;

erunt

erunt a f, b f, γ æquales. Ex f ergò intervallo f a γ 6.1.
descriptum segmentum aeb super a b, angulo dab
alternum capiet angulo dato c æqualem. Comple-
to enim circulo: Quia a d est δ Tan-
gens, ad ipsam factus angulus d a b δ cor.16.III.
dato c æqualis, ϵ æqualis est angulo ϵ 32.III.
a g b in alterno segmento. Quod erat
faciendum.



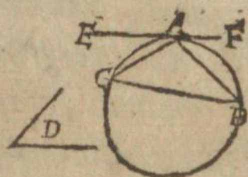
Si angulus datus c sit rectus,
super a b data tanquam diametro
describitur semicirculus, qui angulum ζ rectum ζ 31.III.
capit.

PROPOS: XXXIV.

Problema 6.

A dato circulo segmentum ab-
scindere, capiens angulum æqualem
dato angulo rectilineo *d*.

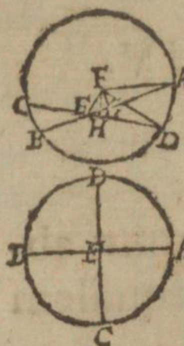
Recta e a f tangat cir-
culum in a, & ad a α fiat angu-
lo dato d æqualis e a c. β Erit α 23.I.
ergò in alterno segmento angu- β 32.III.
lus b angulo e a c, id est, angulo dato d
æqualis.



PROPOSITIO XXXV.

Theorema 29.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ***ab***, ***cd*** sese mutuò secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis ***ae***, ***eb*** unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius ***de***, ***ec*** comprehēditur, rectangulo.



α 12.1. *Ex centro* f *α demittantur perpendiculares* fg, fh, *quæ illas lineas*
β 3.III. *β æqualiter secent in* g *&* h, *ducaturq́;* f e. *γ Erit ergò rectangulum ex*
γ 5.III. ae, cb, *unà cum quadratis* eg *&* gf *vel* ef, *æquale quadratis* ag *&* gf *seu quadrato semidiametri* af: *Sic etiam rectangulum ex* ce, ed,
δ 47.1. *unà cum quadratis* eh *&* hf *δ seu* ef, *æquale quadratis* ch *&* hf *seu quadrato semidiametri* fd. *Ablato ergò utrinq́; ex rectangulis quadrato* fe *communi, residua rectangula ex inæqualibus*
ε 3.ax. *segmentis sunt ε æqualia.*

Si in centro secent se duo diametri, planum est, quod ex segmentis æqualibus seu semidiametris fiant æqualia quadrata.

PRO-

PROPOS: XXXVI.

Theorema 30.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod *d*, ab eoque in circulũ cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera *d a* quidem circulum secet; al- *d b* verò tangat: Quod sub tota secante *d a* & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumita *d c* comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à Tangente *db* describitur, quadrato.



Transeat primò secans a d *per centrum* e, *ducaturq́;* α *perpendicularis Tangenti* e b. β *Erit rectangulum sub tota* a d *cum adjecta & adjecta* c d, *unà cum quadrato dimidiæ* e c *æquale quadrato* e d *ex dimidia & adjecta, id est, quadratis* d b, b e. *Sublatis quadratis æqualibus semidiametrorum* b e *&* e c, γ *erit rectangulum ex* a d *&* d c *æquale quadrato Tangentis* d b.

α 18.III.
β 6.II.
γ 3.ax.

Deinde non transeat secans d a *per centrum, & ducantur* e b, ed, e c *&* e f *perpendiculares.* β *Erit rursus rectangulum ex* a d *&* cd, *unà cum* qua-



quadrato f c *æquale quadrato ex* fd, *additoq; quadrato communi* e f, *æquale erit rectangulum ex* a d *&* cd, *unà cum quadratis* f c *&* f e, *id est*, *quadrato* e c, *quadrato* d e, *seu quadratis* d b, b e. *Ablatis æqualibus quadratis* be *&* ce, *relinquuntur* y *æqualia rectangula ex* ad, dc *& quadratum Tangentis* d b.

PROPOS: XXXVII.

Theorema 31.

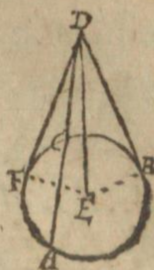
Si extra circulum sumatur punctum aliquod *d*, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera *d a* circulum secet, altera *db* in eum incidit; sit autē quod sub tota secante *a d* & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumta *d c*, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente *d b* describitur, quadrato; incidens ipsa *d b* circulum tanget.

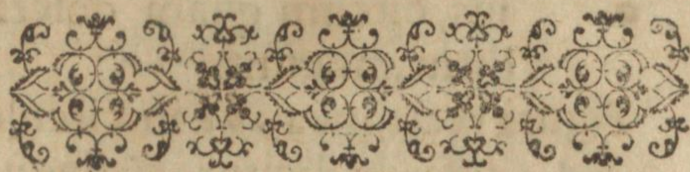
Ducta Tangente d f, *& semidiametris* e f, eb, ed. a *Erit quadratum Tangentis* d f *æquale rectan-*

a 36.III.

le rectangulo ex a d *&* d c,β *id est quadrato* d b *incidentis;* γ*&* d f *ipsi* db *æqualis. Cumq; angulus* b *sit angulo* f *recto* δ*æqualis ;* ε *erit* d b *Tangens.*

β ex hypot.
γ 1. ax.
δ 8.1.
ε 18. III.





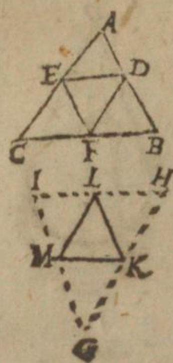
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER IV.

Definitiones.

I.

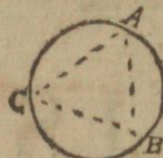
FIgura rectilinea *f d e* in figura rectilinea *a b c* describi dicitur, cum singuli figuræ descriptæ anguli,

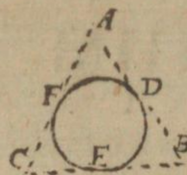


ſingula latera ejus, in qua deſcribitur, tangunt.

2. Figura *g h i* circa figuram *k l m* deſcribi dicitur, cum ſingula deſcriptæ latera, ſingulos angulos ejus, circum quam deſcribitur, tangunt.

3. Figura rectilinea *a b c* in circulo deſcribi dicitur, cū ſinguli figuræ deſcriptæ anguli peripheriam circuli tangunt.





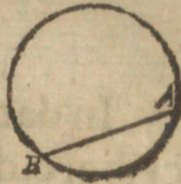
4. Figura rectilinea *a b c* circa circulum deſcribi dicitur, cum ſingula deſcriptæ latera circuli peripheriam tangunt.

5. Circulus in figura rectilinea deſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera ejus, in qua deſcribitur, tangit.

6. Circulus circa figuram rectilineam deſcribi, aut figura rectilinea circulo circumſcribi dicitur, cum circu-

circuli peripheria singulos angulos ejus, circa quam describitur, tangit.

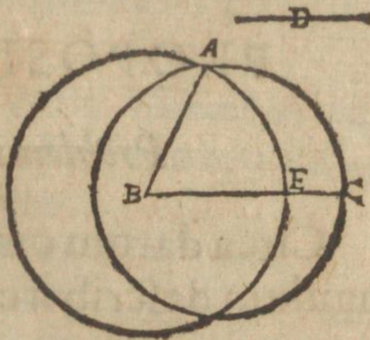
7. Recta *ab* in circulo aptari dicitur, cum ejus extrema in circuli peripheria fuerint.



PROPOSITIO I.

Problema 7.

In dato circulo rectam lineam accommodare, æqualem datæ rectæ lineæ *d*, quæ circuli diametro non sit major.



Cum enim diameter inscriptarum in circulo α *sit maxima, major ipsa inscribi non potest: sin ipsi sit æqualis, quævis diameter ducta erit aptata: Sin minor, intervallo lineæ datæ* d, *describatur circulus super* b c *diametro circuli dati, & connectatur* b *cum* a. β *Erit hæc linea circulo aptata æqualis datæ.*

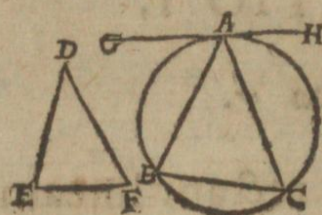
α 15. III.

β 15. def. I. & 1. ax.

PROPOSITIO II.

Problema 2.

In dato circulo triangulum describere, dato triangulo *d e f* æquiangulum.



Adductæ Tangentis g h *punctum* a *α fiant angulis* g a b *ipsi* f, *&* h a c *ipsi* e *æqualis*; *connectanturq;* b c. *β Erit ergò angulus* c *æqualis angulo*

α 23. I.

β 32. III.

γ 32. I. g a b, *id est angulo* f, *& angulus* b *angulo* e; *γ & angulus* b a c *angulo* d, *triangulum inscriptum* a b c, *triangulo* d e f *æquiangulum*.

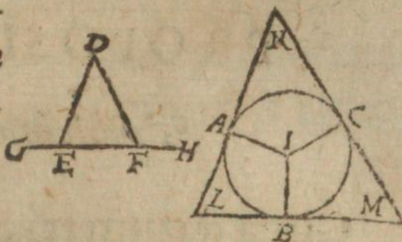
PROPOSITIO III.

Problema 3.

Circa datum circulum *a b c* triangulum describere, dato triangulo *d e f* æquiangulum.

α 23. I. *Productâ utrinq; trianguli basi in* g *&* h, *angulis externis α fiant æquales ad centrum* i; a i b *ipsi* d e g; *&* b i c *ipsi* d f h: *ad extremitates verò semidiametrorum* a, b, c *ducantur perpendiculares*

culares vel β *tangentes, quæ concurrent in* k,l,m. *Ergò in quadrilateris quatuor angulorum rectis quatuor æqualium (propter resolutionem in duo triangula) cum duo oppositi sint* γ *recti; reliqui etiam duo duobus rectis æquales erunt.* Cumq; a i b *ipsi* d e g, & b i c *ipsi* d f h *æquetur,* δ *æquabitur* l *ipsi* d e f & m *ipsi* d f e & ε k *ipsi* d. *Circumscriptum ergò est Triangulum dato æquiangulum.* β 16. III. γ ex constr. δ 15. I & 3. ax. ε 32. I.

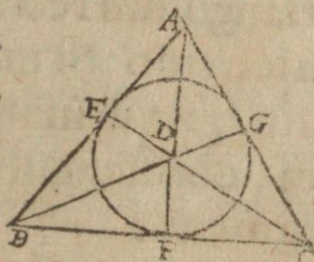


PROPOS: IV.

Problema 4.

In dato triangulo *a b c* circulum inscribere.

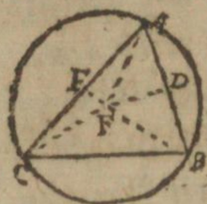
α *Secentur duo anguli bifariam per lineas duas, ex quarum intersectionis puncto* d β *demittantur perpendiculares ad latera singula, earumq; intervallo describatur circulus. Erunt ergò in triangulis* edb, bdf *latera* de, df γ *æqualia, & in triangulis;* f d c, & cdg *latera* f d, g d. δ *Tres nimirum æquales ex puncto* d : *quod* ε *erit centrum circuli singula latera trianguli* ζ *tangentis vel inscripti,* α. 9. I. β 12. I. γ 26. I. δ 1. ax. ε 9. III. ζ cor. 16. III.

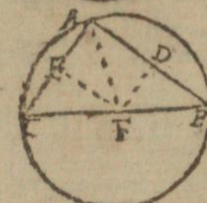


PROPOSITIO V.

Problema 5.

Circa datum triangulum *abc* circulum describere.







α 10. I. *Duo quævis latera α dividantur bisariam per lineas perpendiculares concurrentes in* f, *ex quo ad angulos singulos ducantur lineæ, illarumq; intervallo describatur circulus. Erunt ergò* f a, f b, f c β *æquales, & ex* f γ *centro descriptus circulus circa triangulum datum.*

β 4. I.
γ 9. III.

Corollarium. 1.

α 31. III. Si centrum *f* cadat in latus, α erit triangulum rectangulum, quia in semicirculo: Si intra, erit acutangulum, quia in majori segmento: Si extra, obtusangulum, quia in minori segmento.

Corollarium. 2.

Per data tria puncta non in eadem

dem recta linea existentia, circulum describere licet per hanc propositionem. Connexis enim punctis tribus habeo triangulum.

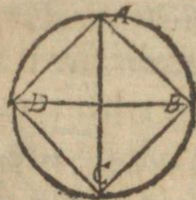
Scholion.

Cuivis figuræ regulari quæ & æquilatera & æquiangula est, circulus tum α inscribitur intervallo perpendicularium concurrentium; tum β circumscribitur, intervallo angulos duos quosque bifariam secantium. α 4.IV. β 6.I.

PROPOS: VI.

Problema 6.

In dato circulo quadratum describere.



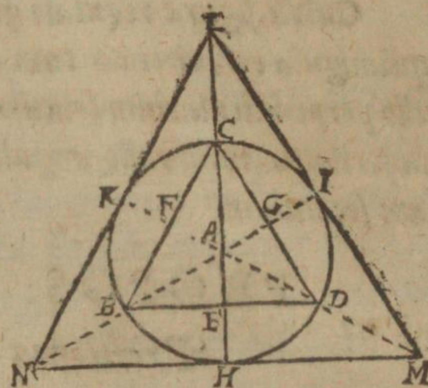
Ducantur duo diametri ad angulos rectos se α intersecantes, eorumque extremitates jungantur rectis a b, b c, c d, d a. *Quatuor angulis ad centrum β rectis, γ æquales sunt quatuor arcus quibus insistunt, & his subtensa quatuor latera δ æqualia. Anguli etiam omnes sunt in semicirculo ε recti. Ergo ζ quadratum* a b c d *inscriptum.* α 11.I. β ex constr. γ 26.III. δ 29.III. ε 31.III. ζ 29. def.I.

LEMMA.

Figura regularis circa circulum descri-

describitur à perpendicularibus *lm*, *ln*, *nm* ab extremitate semidiametrorum *h*, *i*, *k* latera figuræ prius inscriptæ *bc*, *bd*, *cd* bifariam dividentium *in e*, *f*, *g* excitatis.

α per aliquā prop. IV. α *Inscribatur in circulo figura æquilatera & æquiangula, qualis requiritur, & per ipsius angulos ex centro utrinq; continuentur lineæ ad peripheriam in* h, i, k



β 8.l. *& ultra peripheriam in* l, m, n, β *secantes angulos & latera datæ figuræ bifariam, & tres ad centrum efficientes æquales* bad, dac, bac. *Deniq; ad extremitates* h i k γ *excitentur perpendiculares* lm,

γ 11.l. ln, nm. *Cum itaq;* δ *æquales sint anguli* a b e

δ 29.l. a n h; & ade, amh, *id est*, ε *toti* n & b, m & d;

ε 2.ax. l & c; *erit figura* ζ *circumscripta æquiangula.*

ζ 1.ax. *Deinde in triangulis* anm, a m l, a n l *æqualium*

η 6.l. *angulorum*, η *æqualia etiam erunt inter se latera* am, al, a n; *quæ comprehendentia angulos æqua-*

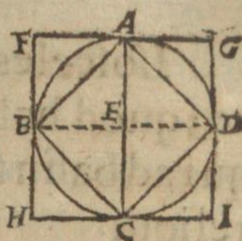
θ 4.l. *les, etiam bases inter se* θ *æquales efficiunt* n m, ml, l n, *figuram quæsitam constituentia.*

PRO-

PROPOS: VII.

Problema 7.

Circa datum circulum, quadratum describere.

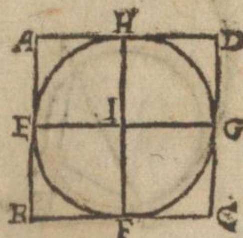


α Inscripto prius quadrato, aliud etiam β circumscribetur. α 6. IV. β per Lemma ejusdẽ.

PROPOS: IIX.

Problema 8.

In dato quadrato circulum describere.

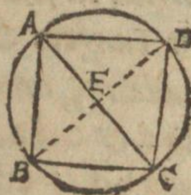


Constructio & demonstratio est ex 4. IV.

PROPOSITIO IX.

Probl. 9.

Circa datum quadratum circulum describere.



Constructio & demonstratio est ex scholio 5. IV.

Scholium.

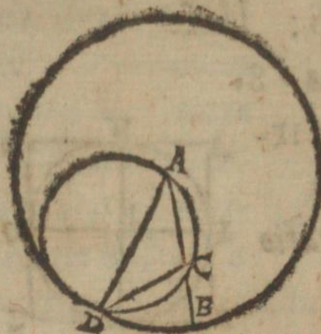
Estq; quadratum circumscriptum inscripti α duplum, quia illud ex diagonio inscripti vel diametro fit, tanquam ex hypotenusa. α 47. I.

PRO-

PROPOSITIO X.

Problema 10.

Isosceles triangulum constituere; quod habeat utrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplũ reliqui.



Data quævis linea a b α *secetur ita, ut rectangulum sub* a b *&* c b *sit æquale quadrato* a c, *&* α 11. II. *intervallo* a b *facto circulo* β *accommodetur* b d *æqualis* a c, *ducanturq;* c d *&* β 1. IV. a d *&* *triangulo* a c d γ *circumscribatur circulus.* γ 5. IV.

δ ex hypot. *Quia ergò quadratum* b d δ *æquale est rectangulo ex secante* b a *&* *externo segmento* c b, ε *erit Tangens &* *angulus* a *angulo* c d b ζ *æqualis, additoq; communi* a d c, *erit* a d b *æqualis angulis* a *&* c d a, *id est angulo* b c d *vel* b. *Ideoq; latera* b d *&* c d *&* c a *erunt* η *æqualia, &* *angulus* a *angulo* a d c; *adeòq; anguli* a $\frac{1}{5}$ *duplus* b c d, *vel duo ad basin* b *&* d. $\frac{2}{5}$ *in triangulo Isosceli* b a d *constituto.*

ε 37. III.
ζ 32. III.
η 6. I.

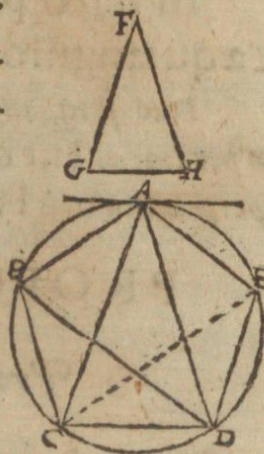
PRO-

PROPOSITIO XI.
Problema II.

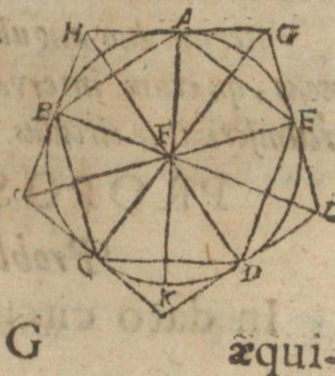
In dato circulo, pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Constructo triangulo Isosceli f g h, *cujus anguli ad basin* g *&* h *sunt dupli tertij* f: β *inscribatur circulo dato æquiangulum* a c d, *& anguli ad* γ *basin* γ *secentur bifariam per lineas* d b, c e *& ducantur rectæ* ab, bc, cd, de, ea. *Insistent ergò quinque anguli* δ *æquales* à ce, ecd, adb, bdc, cad ε *æqualibus peripherijs quinque totum circulum comprehendentibus quibus* ζ *æqualia subtensa quinque latera sunt pentagoni inscripti æquilateri; quod &* η *æquiangulum est, quòd omnes ipsius anguli æqualibus peripherijs circuli insistunt.*

α 10. IV.
β 2. IV.
γ 9. I.
δ ex constr.
ε 26. III.
ζ 29. III.
η 27. III.



PROPOS: XII.
Probl. 12.



Circa datum circulum; pentagonũ

 æqui-

æquilaterum & æquiangulum describere.

α 11.IV. *α Inscripto prius pentagono, circumscribetur aliud per lemma sextæ hujus.*

PROPOSITIO XIII.

Problema 13.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

α 9.I. β scho.5.IV *Duo quiq; anguli proximi α secentur bisariam per lineas* f i, f k, *quarum concursu* f *intervallo perpendicularis* f c *circulus β erit inscriptus.*

PROPOSITIO XIV.

Problema 14.

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum describere.

α 19.I. β scho.5.IV *Iterum duo anguli α secentur bisariam per lineas, quarum intervallo ex illarum concursu β circumscribitur circulus.*

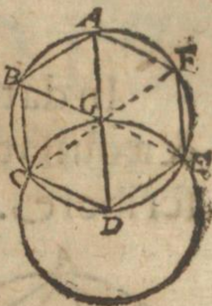
PROPOSITIO XV.

Problema 15.

In dato circulo hexagonum & æqui-

æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

Ducto diametro circuli a d, *ex* d *deſcribatur alius priori æqualis circulus ſecans priorem in* c *&* e *punctis, per quæ ducantur diametri* e b, c f, *itemq;* a b, b c, c d, d e, e f, f a. *Erunt triangula* c g d *&* d g e α *æquilatera &* β *æquiangula, & anguli ad centrum omnes* γ *æquales, vel* $\frac{1}{3}$ *duorum rectorum. Ideoq; omnes* δ *æqualibus inſiſtent peripheriјs, quibus* ε *æquales lineæ, id eſt, latera hexagoni ſex æqualia ſubtendũtur, quæ etiam* ζ *æquales includunt angulos ſex, æqualibus peripheriјs inſiſtentes. Hexagonum ergò & æquilaterum & æquiangulum eſt inſcriptum.*



α 15. def. I.
β 5. I.
γ 32. & 15. I.
δ 26. III.
ε 29. III.
ζ 27. III.

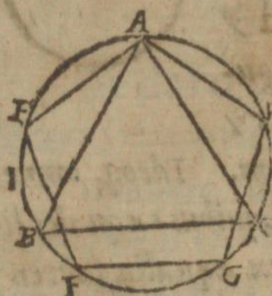
Corollarium.

Latus Hexagoni æquale eſt ſemidiametro ejuſdem circuli. Circulo autem dato circumſcribetur hexagonum per Lemma 6. IV. Circulus ipſi inſcribetur & circumſcribetur per ſcholion 5. IV.

PROPOSITIO XVI.

Problema 16.

In dato circulo quindecagonum & æquilaterum & æquiangulum describere.

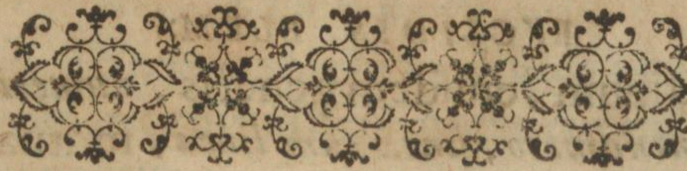


α 2. IV. β 11. IV. *Inscribatur in circulo dato α triangulum æquilaterum & pentagonum. Cum ergo latus trigeni ab $\frac{1}{3}$ vel $\frac{5}{15}$: latus autē pentagoni a e $\frac{3}{15}$ quatuor rectorum: illorum duarum peripheriarum differentia* e b *habet* $\frac{2}{15}$; *Ipsius ergò dimidium erit* $\frac{1}{15}$, *cui subtensum latus* e i *est quindecagoni γ æquilateri & δ æquianguli latus. Ejusdem circumscriptio fiet per Lemma 6. IV. Ipsi autem & inscribetur & circumscribetur circulus per Schol. 5. IV.*

γ 29. III. δ 27. III.



EU-



EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER V.

Definitiones.

I.

PArs est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.

2. Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur majorem. *Intelligitur hîc pars aliquota, quæ aliquoties præcisè continetur in toto, quod ejus multiplex est. Ideoq; & æquemultiplices sunt magnitudines, quæ multitudine æquales partes habent.*

3. Ratio, λόγος, est duarum magnitu-

 tudi-

tudinum, ejuſdem generis, *numeri cum numero, lineæ cum linea*, mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo *quatenus una eſt major altera, vel minor, vel æqualis.*

4. Analogia, proportionalitas vel proportio, eſt rationum ſimilitudo. *Vt enim magnitudines, ita earum rationes inter ſe comparantur.*

5. Rationem inter ſe habere magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſeſe mutuò ſuperare.

6. In eadem ratione dicuntur eſſe magnitudines, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æquemultiplicia, à ſecundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiſcunq; ſit hæc multiplicatio, utrumq; ab utroque vel unà deficiunt, vel unà æqualia ſunt, vel una excedunt, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. *Multiplex primæ cum multiplice ſecundæ; & tertiæ cum quartæ multiplice. Complectitur autem definitio etiam magnitudines tres, ſi media bis ſumatur.*

7. E-

7. Eandem autem habentes rationem magnitudines, proportionales vocentur.

8. Cùm verò æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secũdæ; at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ, tunc prima ad secundã majorem habere rationem dicetur, quàm tertia ad quartam.

9. Analogia ad minimum in tribus terminis consistit. *Ut haberi possint duo Antecedentes & duo consequẽtes.*

10. Cum tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicatam rationẽ, *multiplicatá in sese vel quadratè ratione primæ ad secundam*, habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: at cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatã, *cubicè in se multiplicata ratione primæ ad secundam*; rationẽ habere dicitur ejus quam habet ad secundam: & semper deinceps uno amplius, quam

dua proportio extiterit. *Loquitur definitio tantùm de cōtinua proportionalitate.*

11. Homologæ ſeu ſimiles rationes magnitudines dicuntur, Antecedentes quidem Antecedentibus, conſequentes verò conſequentibus. *Ante proportiones dixerat rationum ſimilitudines: nunc ejus terminos etiam dicit ſimiles. Sequuntur jam ſex argumentandi modi Geometris uſitati.*

12. Alterna ratio eſt ſumtio Antecedentis ad Antecedentē, & conſequētis ad conſequentem. *Oportet hîc omnes terminos eſſe ejusdē generis. Non n. ſi ſit ut numerus ad numerum, ſic linea ad lineam, rectè collegeris alternè, ut numerus ad lineam; ſic numerus ad lineam.*

13. Inverſa ratio eſt ſumtio conſequentis tanquam Antecedentis, ad Antecedentem tanquam conſequentem.

14. Compoſitio rationis eſt ſumtio Antecedentis cum conſequente ceu

unius

unius, ad ipſam conſequentem vel compoſitio rationis eſt ſumtio terminorum ſimul ad alterutrum eorundem. Et contra, eſt ſumtio alterutrius termini ad compoſitum ex utriſque. *Hîc in compoſitione rationum tantùm intelliguntur termini: ipſæ rationes in 5. def. VI.*

15. Diviſio rationis eſt ſumtio exceſſus, quo conſequentem ſuperat Antecedens, ad ipſam conſequentem. Vel eſt ſumtio exceſſus termini majoris ſupra minorem, ad ipſum minorem: Et contra minoris ad exceſſum majoris.

16. Reverſio rationis eſt ſumtio Antecedentis ad exceſſum, quo Antecedens ſuperat conſequentem. Vel eſt ſumtio termini majoris ad exceſſum ſupra minorem. Et contra, exceſſus terminorum ad ipſum majorem.

17. Ex æqualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint magnitudines, & his aliæ multitudine pares quæ binæ ſu-

mantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam; sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit. Vel, Est sumtio extremorum per subductionem mediorum. *Hi modi argumentandi demonstrantur in aliquot propositionibus.*

18. Ordinata sive directa proportio est, cum fuerit, quemadmodum Antecedens ad consequentem; ita Antecedens ad consequentem; fuerit etiam, ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

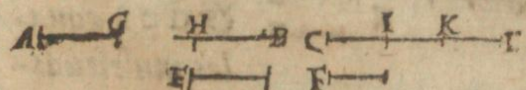
19. Perturbata autem proportionalitas est, cum tribus positis magnitudinib. & aliis, quæ sunt his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet Antecedens ad consequentem; ita in secundis magnitudinibus Antecedens ad consequentem: ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam; sic in secundis magnitu-

gnitudinibus aliud quidpiam ad Antecedens.

PROPOSITIO I.

Theorema I.

Si sint quotcunque magnitudines *a b*, *c d*, quotcunque magnitudinum, *e*, *f*, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices *a b ipsius e*, *c d ipsius f*; quam multiplex est unius *e* una *a b* magnitudo; tàm multiplices erunt & omnes *a b*, *c d*, omnium *e*, *f*.



Cum ergò ter contineat a b *ipsam* e, *&* c d *ipsam* f; *singulis ternis unius partibus*, a g, g h, h b, *addantur singulæ alterius* c i, i k, k d: *Erunt ipsis* e *&* f *junctis ter binæ ter* α *æquales*: *ac proinde* β *æquemultiplex totum ex* a b, c d, *totius ex* e, f. *Si itaq; partes sint æquemultiplices partium, totum etiam totius est æquemultiplex. Indeq; idem est multiplicare per partes ac per totum.*

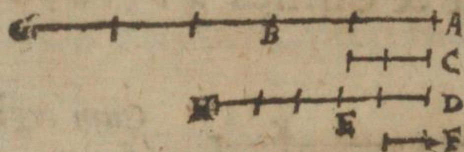
α 2. ax.
β 2. def. V.

PRO-

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si prima *ab* secundæ *c* fuerit æquemultiplex, atque tertia *de* quartæ *f*; fuerit autem & quinta *bg* secundæ *c* æquè multiplex, atque sexta *eh* quartæ *f*; erit & composita prima cum quinta *ag* secundæ *c* æque multiplex, atque tertia cum sexta *dh* æque multiplex quartæ *f*.



α ex hypot.

β 2 ax.

γ 2.def. v.

Si enim æqualibus multitudinibus a b *&* d e α *æquales multitudines* bg *&* eh *addantur*; β *erunt etiam compositæ* a g *&* d h *æquales*, *& suarum partium* γ *æque multiplices*.

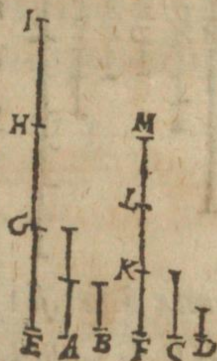
PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si sit prima *a* secundæ *b* æque multiplex, atque tertia *c* quartæ *d*; sumãtur autem æquemultiplices *e i*, *f m* pri-

primæ *a* & tertiæ *c*: Erit & ex æquo ſumtarum *e i* ad *b* & *f m* ad *d* utraque utriuſque æque multiplex; altera *e i* quidem ſecundæ *b*, altera *f m* autem quartæ *d*.

Quia enim prima a, *illiq;* α *æquales* e g, g h, h i *ſunt æque multiplices ſecundæ* b, *atq; tertia* c, *illiq; æquales* f k, k l, l m, *quartæ* d; β *erunt etiam compoſitæ* e i *&* f m *earundem, ſecundæ* b *&* *quartæ* d *æque multiplices. id eſt*, γ *extremè vel ex æquali ſumtæ.*



α ex hypot.

β 2. v.

γ 17. def. v.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si prima *a* ad ſecundam *b* eandem habuerit rationem, & tertia *c* ad quartam *d*: etiam æque multiplices primæ *e* & tertiæ *f*, ad æque multiplices ſecundæ *g* & quartæ *h*, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumtæ fuerint.

Aeque



Aeque multiplicium e *&* f *sumantur aliæ æquemultiplices* i *&* k; *itemq;* *æquemultiplicium* g *&* h *aliæ* l *&* m; α *erunt ex æquali* i *&* k *æque multiplices primæ* a *&* *tertiæ* c: *itemq;* l *&* m, *æque multiplices secundæ* b *&* *quartæ* d. *Cumq; sit, ut prima ad secundam; sic tertia ad quartam, quarũ æquemultiplices sunt demonstratæ* i k *&* l m *directè sumtæ*, β *fiet, si* i *superat* l, *etiam* k *superabit* m, *ut hoc loco: Cumq; eædem etiam sint æquemultiplicium* e f *&* g h *æquemultiplices constructæ*; β *Ergo ut* e *ad* g, *ita* f *ad* h.

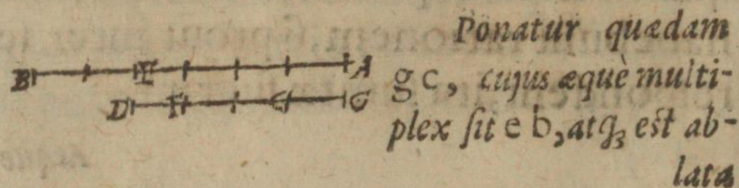
α 2. V.

β 6. def. V.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si magnitudo *ab* magnitudinis *cd* æque fuerit multiplex, atque ablata *ae* ablatæ *cf*: etiam reliqua *eb* reliquæ *fd* ita multiplex erit, ut tota *ab* totius *cd*.



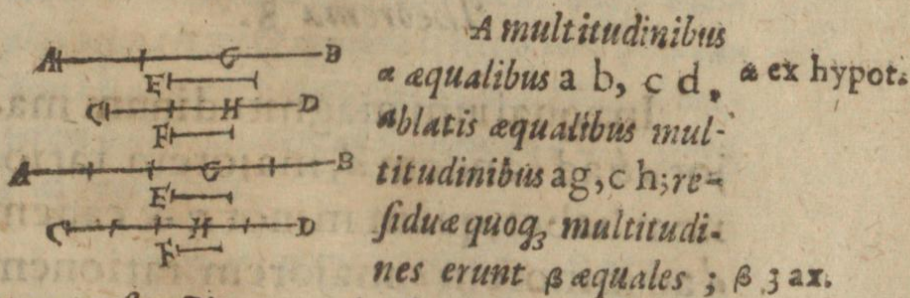
Ponatur quædam g c, *cujus æquè multiplex sit* e b, *atq; est ablata*

lata a e, *ablatæ* c f, *vel tota* a b *totius* c d: α *erit quoq; tota* a b, *totius* g f *æque multiplex, atq; ablata* a e, *ablatæ* c f. β *eritq;* g f *æqualis ipsi* c d, & *ablata communi* c f, *erunt* g c & f d *æquales. Cum itaq;* e b *reliqua sit tam multiplex ipsius* g c, *quàm multiplex est* a b *ipsius* cd; *tam multiplex etiam erit* eb *reliqua reliquæ* f d. *Quod erat propositum.* α 1. V. β 6. ax.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duæ magnitudines *a b*, *c d* duarum magnitudinum *e* & *f* sint æquè multiplices; & detractæ quædam *a g*, *c h* sint earundem *e* & *f* æque multiplices: & reliquæ *g b* & *h d*, eisdem *e* & *f* aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.



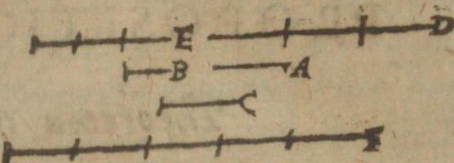
A multitudinibus α *æqualibus* a b, c d, *ablatis æqualibus multitudinibus* ag, c h; *residuæ quoq; multitudines erunt* β *æquales*; *sive ex constructione æquales sint ipsis* e & f, *ut in priori figuratione; sive earundem æque multiplices, ut in posteriore.* α ex hypot. β 3 ax.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Aequales *a,b* ad eandem *c*, eandem habent rationem; & eadem *c* ad æquales *a,b*.



Sint æqualium a *&* b *æquè multiplices* d *&* e. a *æquales, & ipsius* c *multiplex utcunq;* f. *Quia ergò multiplex* d *est minor multiplice* f, *eâdem minor quoq; est multiplex* e. *Ideoq;* β *erit, ut* a *ad* c, *sic* b *ad* c: *& convertendo* β *ut* c *ad* a, *sic idem* c *ad* b.

a 6. ax.

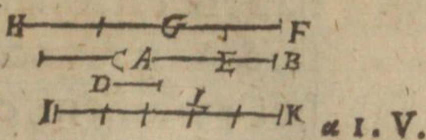
β 6. def. v.

PROPOS: IIX

Theorema 8.

Inæqualium magnitudinum major *a b* ad eandem *d*, majorem rationem habet, quàm minor *c*: & eadem *d* ad minorem *c* majorem rationem habet, quàm ad majorem *a b*.

Sit major a b *prima*, c *tertia*, d *secunda &* *quartá*



quarta; ipsiq; c *ex* a b *auferatur æqualis* a e, *& ipsarum* a e *vel* c *&* e b *fiant æquemultiplices* h g, g f, *quarum utraq; major sit quàm* d, *& sic* h f *tota etiam totius* a b *majoris æquemultiplex* α*erit, atq;* h g *ipsius* a e *vel* c. *Fiat item secundæ & quartæ* d *æquemultiplex* i k, *proximè major multiplice* h g, *sed minor multiplice* h f, *& de* i k *abscindatur ipsi* d *æqualis* l k. *Non erit ergò* i l *major quàm* h g, *sed vel æqualis vel minor (aliàs non esset* i k *multiplex ipsius* d, *proximè major quam* h g) *Et cum* g f *major sit quàm* d *vel* l k; *ideoq; etiam tota* h f *major erit quàm* i k. *Et proinde, cum* f h, h g *sint æque multiplices primæ* a b *& tertiæ* c, *atq;* i k *multiplex* d *secundæ & quartæ: sicq;* f h *major quam* i k; h g *verò minor quàm* i k; *major* β*erit proportio* a b *primæ ad* d *secundam, quàm* c *tertiæ ad* d *quartam. Et convertendo, cum tertiæ* d *multiplex* i k *sit major multiplice primæ* h g; *& ejusdem* d *tertiæ multiplex eadem* i k *minor* h f *multiplice quartæ: Ideoq;* d *majorem habet rationem ad* c, *quàm ad* a b. *Quod erat propositum.*

α 1. V.

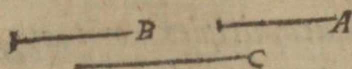
β 8. def. V.

PROPOSITIO IX.

Problema 9.

Quæ *a* & *b* ad eandem *c*, eandem

habent rationem, æquales sunt inter se: & ad quas *a* & *b* eadem *c* eandē habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.



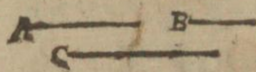
Si a *major esset quàm* b, *α esset major majoris* a *proportio ad* c, *quàm* b *minoris ad eandem, contra hypothesin. Ideoq; non sunt inæquales. Rursus, si* c *habeat eandem rationem ad utramq; * a *&* b, *etiam æquales sunt. Sin minus, esto* a *major, tum* c *ad* b *minorem, majorem haberet rationem, quàm ad* a, *quod est contra hypothesin.*

α 8. V.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Ad eandem magnitudinem *c* rationem habentium, quæ *a* majorem rationem habet, illa major est: ad quam *b* autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.



Nisi enim a *majorem habens rationem ad* c, *quàm* b *ad* c, *esset major* b, *foret vel æqualis, & sic contra hypothesin α haberet eandem rati-*

α 7. V.

rationem ad c, vel minor, & sic b ad c majorem
β haberet rationem, quàm a contra hypothesin. β 8.V.
Vice versa, si c habeat rationem majorem ad b,
quàm ad a, rursus erit major a, quàm b: sin minus,
erit ipsi vel æqualis & contra hypothesin α erit ipsius
c ad utramq; eadem ratio; vel minor, & sic major
erit ratio c ad a, quàm ad b, contra hypothesin.

PROPOSITIO XI.

Theorema 11.

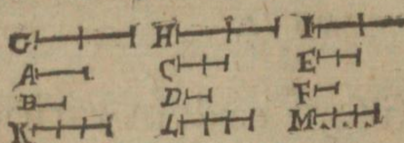
Quæ eidem sunt eædem rationes, inter se sunt eædem.

Sumantur & Antecedentium a, e, c, æquè multiplices g, h, i; & consequentium b, f, d, æque multiplices k, m, l. Quia ergò est, ut a ad b, sic c ad d, α fiet; si g superat i, etiam k superet m, & si æqualis, æqualis; & si minor, minor sit. α 6.def. V. Quia etiam est, ut e ad f, sic c ad d; fiet etiam, si h superat i, etiam m superet l & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Cùm ergò æque multiplices directè sumtæ, habeant hanc triplicem conditionem, excessus, æqualitatis & defectus, α erit, ut a ad b, sic e ad f.

PROPOS: XII.

Theorema 12.

Si sint magnitudines quotcunq; proportionales *ab*, *cd*, *ef*; quemadmodum se habuerit una *a* Antecedentium, ad unam *b* consequẽtium; ita se habebunt omnes antecedentes *a*, *c*, *e*, ad omnes consequentes *b*, *d*, *f*.



Sumantur æquè multiplices tum Antecedentium a, c, e, *quæ sint* g, h, i; *tum consequentium* b, d, f, *quæ sint* k, *l*, m: α *Erit composita* g h i, *compositæ* k l m *æquè multiplex*, *ac* a *ipsius* b. *Cumq; sit, ut* a *ad* b, *sic* c *ad* d *&* e *ad* f; β *fiet*; *si* g *superat* k, *etiam* h *superet* l *&* i *superet* m; *& si æqualis, æqualis*; *& si minor, minor*: *Atq; ita* g, h, i, *simul ad* k, l, m *simul triplicem illam conditionem* β *recipiant*. *Ideoq; ut* a *ad* b; *sic omnes antecedentes* a, c, e *ad omnes consequentes* g, d, f.

α 1. V.

β 6. def. V.

PROPOS: XII.

Theorema 13.

Si prima *a*, ad secundam *b*, eandem habuerit rationem, quam ter-

tia *c* ad quartam *d*; tertia verò ad quartam majorem rationem habuerit, quàm quinta *e* ad sextam *f*: prima quoque ad secundam, majorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.

Sumantur æquè multiplices tùm Antecedētiũ a, cd, *quæ sint* g, h, i *tum consequentiũ* b, d, f, *quæ sint* k, l, m, *ut in præcedente propositione. Quia ergò eadem est ratio* a *ad* b, *quæ* c *ad* d : *sed* c *ad* d *major est ratio, quàm* c *ad* f : α *fiet, si* g *superat* k, *etiam* h *superet* l, *sed* i *quandoq; deficiat ab* m. *Atq; ita, cum* g *superet* k, l *non superet* m, β *habebit* a *ad* b *majorem rationem, quàm* c *ad* f.

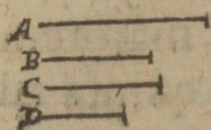
α 6. def. V.
β 8. def. V.

PROPOS: XIV.

Theorema 14.

Si prima *a*, ad secundam *b*, eandem habuerit rationem, quam tertia *c* ad quartam *d*; prima verò quàm tertia major fuerit, erit & secunda major quàm quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & se-

cunda æqualis quartæ: si verò minor, & minor erit.

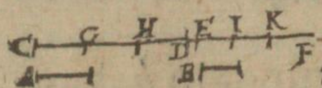


Sit a *major quàm* c: *Ergò* α *habet majorem rationem* a *ad* b *quàm* c *ad* b: *& cum sit, ut* a *ad* b, *ita* c *ad* d; β *erit etiam* c *ad* d
α 8.V. β 10.V. *major ratio, quàm* c *ad* b *&* d *erit minor quam* b. *Ob easdem etiam rationes quarta est major secunda, si tertia major sit prima; æqualis etiam, si æqualis.*

PROPOSITIO XV.

Theorema 15.

Partes *a*,*b*, cum pariter multiplicibus *cd*,*ef*, in eadem sunt ratione, si, prout sibi mutuò respondent, ita sumantur *ut a ad b, sic c d ad e f.*



Cùm ergò partes æque multiplicium numero sint æquales, cg, gh, hd *ipsius* a; ei, ik, kf *ipsius* b; *quæ erit ratio unius Antecedentium* cg, *ad unam consequentium* ei; *eadem* α *erit*
α 12.V. *omnium* cd, *ad omnes* ef.

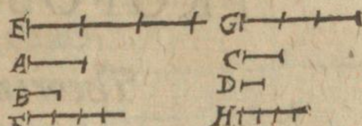
PRO-

PROPOSITIO XVI.

Theorema 16.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint *ut a ad b, sic c ad d*; & vicissim proportionales erunt *ut a ad c, si b ad d.*

Sumantur æque multiplices primæ e, *& secundæ* f; *item tertiæ* g *& quartæ* h. α

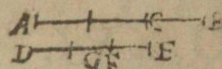


Erit ut a *ad* b; *Sic* e *ad* f; *& ut* c *ad* d; *sic* g *ad* h: α 15. V.
β *Idcirco etiam, ut* e *ad* f : *ita* g *ad* h. *Si itaq;* e β 11. V.
fuerit major quàm g, *etiam* f γ *erit major quàm* γ 14. V.
h; *& si æqualis, æqualis, & si minor, minor. atque sic, ut* a *ad* c, *ita* b *ad* d.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 17.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint ut *a b*, ad *c b*, sic *d e*, ad *f e*; hæ quoque divisæ proportionales erunt, *ut ac ad cb; ita df ad fe.*

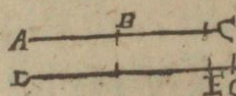


Si enim magnitudo de *non est in* f *secta, ut* a b *in* c, *esto secta in* g. *Erunt*
α 16. V. *ergò duæ Antecedentes conjunctæ, hoc est* a b, *ad duas consequentes, hoc est*, d e, *ut* b c *ad* e g. *Sed tota* ab *ad* ed *ponebatur, ut tota* d e *ad* e f. *Itaq;* α *erit, ut* ab *ad* de; *ita* bc *ad* ef. *Quare* e f *æqualis erit ipse* e g, *pars toti. Quod absurdum.*

PROPOS: XIIX.

Theorema 18.

Si divisæ magnitudines sint proportionales *ut a b ad b c; ita d e ad e f;* etiam compositæ proportionales erunt, *ut a c ad b c; ita d f ad c f.*



Si minus, habeat d f *ad aliam* d g
α 17. V. *eam rationem, quam*
β 14. V. ac *ad* ab, α *Erit ergò dividendo, ut* a b *ad* b c *ita* d g *ad* g f: *Sed ut* a b *ad* bc, *ita erat* d e *ad* ef: *Ideoq;* β *erit etiam, ut* d e *ad* e f; *ita* d b *ad* g f. *Cumq; prima* d e *sit minor tertia* d g; *etiam secunda* ef *erit minor quarta* g f, *par totum parti. Quod absurdum.*

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Theorema 19.

Si, quemadmodum totum *a b* ad totum *c d*; ita ablatum *a e* se habuerit ad ablatum *e f*: & reliquum *e b* ad reliquum *f d*, ut totum ad totum se habebit.

Cum igitur sint, ut ab *ad* c d; *ita* a e *ad* c f; α *erit* ἐναλλάξ, *ut* a b *ad* ae; *ita* c d *ad* c f: & β *dividendo, ut* eb *ad* ae; *ita* f d, *ad* c f & γ *componendo, ut* a b *tota ad* e b *reliquam; ita* cd *tota, ad* f d *reliquam*: & α *permutando, ut* ab *ad* cd; *ita* eb *reliqua, ad* f d *reliquam.* α 16. V. β 17. V. γ 18. V.

A — E — B
C — F — D

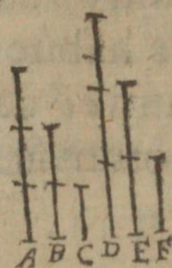
PROPOSITIO XX.

Theorema 20.

Si sint tres magnitudines *a, b, c*, & aliæ ipsis numero æquales *d, e, f*, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, *ut a ad b, ita d ad e; & ut b ad c; ita e ad f*: ex æquo autem prima *a* quàm tertia *c* major fuerit & quarta

 d quàm

d quàm ſexta *f* major. Quod ſi prima *a* tertiæ *c* fuerit æqualis; erit & quarta *d* æqualis ſextæ *f*: ſin illa minor, hæc quoque minor erit.



α 8. V. *Sit enim prima* a *major quàm tertia* c;*tum* a *ad* b α *habet majorem rationem quàm* c *ad* b; *& quia* d *ad* e *eandem habet rationem,*
β 13. V. *quàm* a *ad* b; β *erit etiam major* d *ad* e, *quam* c *ad* b, *hoc eſt, quàm*
γ 10. V. f *ad* e: γ *Ideoq; major erit* d *quarta, quàm ſexta.*
δ 7. V. *Sic, ſi* a *eſt æqualis* c, *etiam* d *eſt* δ *æqualis* f, *& ſi minor, minor.*

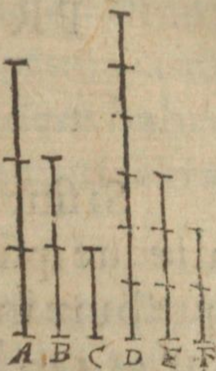
PROPOSITIO XXI.

Theorema 21.

Si ſint tres magnitudines *a,b,c* & aliæ ipſis æquales numero *d,e,f*, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur *ut a, ad b, ſic e ad f; & ut b ad c, ſic d ad e;* fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima, quàm tertia major fuerit: erit & quarta quàm ſexta major. Quod ſi prima ter-

tertiæ fuerit æqualis; erit & quarta æqualis sextæ; Sin illa minor, hæc quoque minor erit.

Sit enim a *major quàm* c, *& sic* a *ad* b *majorem* α *habet rationem, quàm* c *ad* b; *adeoq́ʒ* c *ad* f β *majorem, quàm* c *ad* b. *hoc est, quàm* e *ad* d: *eritq́ʒ* d *major quàm* f; *Sic, si* a *est æqualis* c, *etiam* d *æqualis est* f; *& si minor, minor.*



α 8 V.
β 13 V.
γ 10. V.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 22.

Si sint quotcunque magnitudines, *a*, *b*, *c*, & aliæ ipsis æquales numero *d*, *e*, *f*, quæ binæ in eadem ratione sumantur, *ut a ad b, sic d ad e; & ut b ad c, ita e ad f*; & ex æqualitate in eadem ratione erunt, *ut a ad c; ita d ad f.*

Prioribus tribus adjungatur g, *& posterioribus* h. *Sitq́ʒ ut* a *ad* b, *ita* c *ad* g; α ἐναλλὰξ *ergò ut* a *ad* c, *ita* b *ad* g: *Sit item ut* d *ad* e, *ita* f *ad* h;

α 16. V.



erit

α erit iterum ut d *ad* f, *ita* e *ad* h. *Cum ergò con-*
β ex hypot. *sequentes β sint in eodem ordine cum antecedenti-bus; Ideoq; est, ut* a *ad* c, *sic* d *ad* f.

PROPOS: XXIII.

Theorema 23.

Si sint tres magnitudines *a, b, c*, aliæque ipsis numero æquales *d, e, f*, quæ binæ in eadem ratione sumantur, *ut a ad b, sic e ad f, & ut b ad c; sic d ad e*; fuerit autem perturbata earum proportio: etiam ex qualitate in eadem ratione erunt, *ut a ad c, sic d ad f*.



Sin minus, fiat ut b *ad* c, *ita* f *ad* g *assumtam: eritq;* d *ad* e *ut* f *ad* g, *quatuor nimirum proportionales; ac proinde α ut* d *ad* f, *ita* e *ad* g. *Sed* e *ad* g *est* f *ut* a *ad* c, *β itaq; &* d *ad* f *est, ut* a *ad* c.

α 61. V.
β 11. V.

PROPOS: XXIV.

Theorema 24.

Si prima *a b* ad secundam *c* eandem

dem habuerit rationem, quam tertia *de* ad quartam f; habuerit autem & quinta *bg* ad secundam *c* eandem rationem, quam sexta *eb* ad quartam *f*: etiam composita *ag* prima cum quinta, ad secundam *c* eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta *dh* ad quartam *f*.

Quia enim est, ut b g *ad* c, *ita* e h *ad* f; *erit convertendo, ut* c *ad* b g; *ita* f *ad* eh. *Cumque sit ut* a b *ad* c, *ita* d e *ad* f; *& ut* c *ad* bg, *ita* f *ad* e h, α *erit ex æquali, ut* a b, *ad* bg; *ita* d e *ad* eh. *Ergò, cùm &* β *componendo, ut* ab *ad* b g, *ita* d h *ad* e h: *& ut* b g *ad* c, *ita* e h *ad* f; α *erit ex æquali* a g *ad* c, *ut* dh *ad* f.

α 22. V.
β 18. V.

PROPOS: XXV.

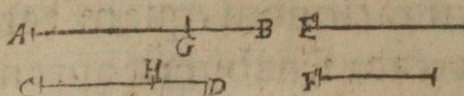
Theorema 25.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, *ut a b ad c d; sic e ad f*: maxima *a b* & minima *f* reliquis duabus *c d* & *e* majores erunt.

Ex a b *æqualis* e *auferatur* a g, *& ex* c d *ipsi* f, c h. *Fit, ut* ab *ad* cd; *sic* ag *ad* ch; *Et ut*

a b ad

α 19. V.
β ex hypot.
γ 14. V.



ab *ad* cd; α *sic reliqua* gb *ad* hd. *Cumq;* β *major sit* ab *quàm* cd, γ *major erit &* gb *quàm* hd *ex similitudine rationum. Additis ergò æqualibus* f *&* ch *ad æquales* ag *&* e, *æquales sunt* ag *&* f *simul, ipsis* e *&* ch *simul; quibus si rursum addantur inæquales* gb *major &* hd *minor, erunt* ab *maxima &* f *minima simul majores medijs* cd *&* e *simul.*

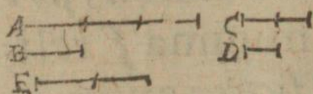
Sequentes propositiones ideò hic inter Euclideas tolerantur, quia scriptores gravissimi, Archimedes, Apollonius & Pappus ijs utuntur.

PROPOS: XXVI.

Theorema 26.

Si prima *a* ad secundam *b* habuerit majorem proportionem, quàm tertia *c* ad quartam *d*: habebit convertendo secunda ad primam minorem proportionem, quàm quarta ad tertiam.

α 10. V.
β 8. V.



Habeat quædam e *eandem rationem ad* b, *quam habet* c *ad* d. *Quia ergò* a *ad* b, *majorem habet rationem, quàm* c *ad* d, *id est, quàm* e *ad* b; *erit etiam* a α *ma-*

a α major quàm e ; *&* b *ad* a *minorem β habebit rationem, quam ad* c *minorē, id est, quàm* d *ad* c.

PROPOS: XXVII.

Theorema 27.

Si prima *a* ad ſecundam *b*, habuerit majorem proportionem, quàm tertia *c* ad quartam *d*: habebit quoq; viciſſim prima ad tertiam majorem proportionem, quàm ſecunda ad quartam.

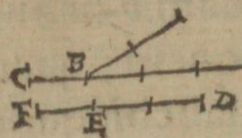
Intelligatur e *eſſe ad* b, *ut* c *ad* d. *Quia ergò ad* b *majorem habet rationem* a *quàm* e ; a *erit α major* e : *β majorq; erit proportio* a *ad* c, *quàm* e *ad* c *Cumq; permutando ſit, ut* e *ad* c, *ita* b *ad* d. *majorq; ſit ratio* a *quàm* e *ad* c; *etiam* a *ad* c *quàm* b *ad* d *majorem rationem habebit.* α 10. V. γ 8. V.

PROPOSITIO XXIIX.

Theorema 26.

Si prima *ab* ad ſecundam *bc* majorem habuerit proportionem, quàm

quàm tertia *de* ad quartam *ef*, habebit quoque composita prima cum secunda *ac*, ad secundam *bc* majorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta *df* ad quartam *ef*.



Habeat g b *rationem ad* b c, *quam* d e *ad* e f, *eritq;* a b *ad* b c *major proportio, quàm* g b *ad* bc, & ab α *major quàm* g b. *Addita ergò communi* bc, *fiet* abc *major, quàm* gbc, β *majorq́; erit proportio* abc *quàm* gbc *ad* bc. *Sed* γ *componendo; ut est* gbc *ad* bc *ita* d f *ad* e f. *Major itaq; est proportio* ac *ad* bc, *quàm* d f *ad* e f.

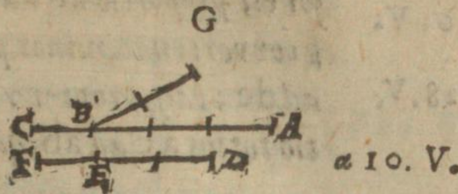
α 10.V.
β 8.V.
γ 18.V.

PROPOS: XXIX.

Theorema 29.

Si composita *ac* prima cum secunda ad secundam *bc* majorem habuerit proportionem, quàm composita *df* tertia cum quarta ad quartam *ef*: habebit quoque dividendo prima *ab* ad secundam *bc* majorem proportionem, quàm tertia *de* ad quartam

tam *ef.*



Habeat gbc *ad* bc *rationem, quam* d f *ad* e f, *eritq;* *major* ac, *quàm* gbc *ratio ad* b c, α *majorq;* ac *quàm* g b c. *Hinc ablata communi* b c, *major erit* ab *quàm* g b; *adeoq;* β *major proportio* a b *quàm* gb *ad* bc. *Sed* γ *dividendo, ut* g b *ad* bc, *ita* de *ad* e f, *Ergò major est proportio* a b *ad* bc, *quàm* de *ad* e f.

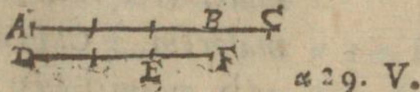
α 10. V.
β 8. V.
γ 17. V. & ex hypo.

PROPOS: XXX.

Theorema 30.

Si composita *ac* prima cum secunda, ad secundam *bc* majorem habuerit proportionem, quàm composita *df* tertia cum quarta, ad quartam *ef*: habebit per conversionem rationis, *ac* prima cum secunda, ad primam *ab*, minorem proportionem, quam *df* tertia cum quarta, ad tertiam *de*.

Quia enim a c *ad* b c *major est proportio, quàm* d f *ad* ef; *etiam* α *dividendo ma-*



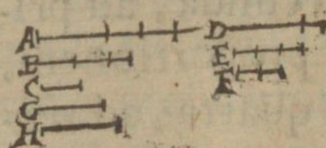
α 29. V.

β 26.V. *jor est proportio* ab *ad* bc, *quàm* de *ad* ef. *Ideoq;*
β convertendo, minor proportio bc *ad* ab, *quàm* ef
γ 28.V. *ad* de; *eaq; propter γ componendo minor propor-*
tio totius a c *ad* ab, *quàm totius* df *ad* de.

PROPOS: XXXI.

Theorema 31.

Si sint tres magnitudines *a, b, c*, & aliæ ipsis æquales numero *d, e, f*, sitque major proportio primæ *a* priorum, ad secundam *b*; quàm primæ posteriorum *d* ad secundam *e*; item secundæ *b* priorum ad tertiam *c* major, quàm secundæ *e* posteriorum ad tertiam *f*: erit quoque ex æqualitate major proportio primæ *a* priorum ad tertiam *c*; quàm primæ *d* posteriorū ad tertiam *f*.



Esto enim g *ad* c, *ut* e *ad* f, *&* α *erit major*
α 13.V. *ratio* b *quàm* g *ad* c, *β ma-*
β 10.V. *jorq;* b *quàm* g. *Ideoq; γ*
γ 8.V. *major erit ratio* a *ad* g *minorem*, *quàm ad* b *majorem. Cum autem major ponatur ratio* a *ad* b, *quàm* d *ad* e; *multò erit major* a *ad* g, *quàm*

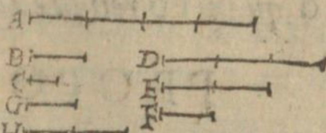
quàm d *ad* e. *Rursus esto* h *ad* g, *ut* d *ad* e, *& erit* a *ad* g *major quàm* h *ad* g, β *majorq;* a *quàm* h, *Ideoq; ad* c *major* a *majorem habet rationem, quàm* h. *Sed ut* h *ad* c, δ *ita* d *ad* f, *ex æquali* δ 22. V.
(*quia ut* d *ad* e, *ita* h *ad* g, *& ut* e *ad* f, *ita* g *ad* c) *Ergò etiam major est ratio* a *ad* c, *quàm* d *ad* f.

PROPOS: XXXII.

Theorema 32.

Si ſint tres magnitudines *a*, *b*, *c*, & aliæ ipſis æquales numero *d*, *e*, *f*, ſitque major proportio primæ *a* priorum ad ſecundam *b*, quàm ſecundæ *e* poſteriorum ad tertiam *f*; item ſecundæ *b* priorum ad tertiam *c* major, quàm primæ *d* poſteriorum ad ſecundam *e*: erit quoque ex æqualitate major proportio primæ *a* priorum ad tertiam *c*, quàm primæ *d* poſteriorum ad tertiam *f*.

Esto g *ad* c, *ut* d *ad* e, *eritq;* b *major ratio, quàm* g *ad* c, *&* b α *major quàm* g. β *Major ergò est ratio* a *ad* g *minorem quàm ad* b. α 10. V. β 8. V.



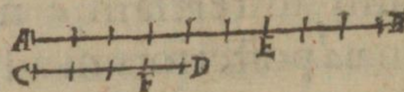
Cumq́ a ad b sit major quàm e ad f, multò major est a ad g quàm e ad f. Rursus esto h ad g ut e ad f, eritq́ a ad g major ratio, quàm h ad g, & a α major quàm h. Ideoq́ & a major quàm h ad g habet majorem rationem. γ Sed ut h ad c, ita ex æquali d ad f. Ergò major est etiam ratio a ad c quàm d ad f.

α 10.V.
β 8.V.
γ ex hypot.

PROPOS: XXXIII.

Theorema 33.

Si fuerit major proportio totius *ab* ad totum *cd*, quàm ablati *ae* ad ablatum *cf*: erit & reliqui *eb* ad reliquum *fd* major proportio, quàm totius *ab* ad totum *cd*.



Quia enim major est ratio ab *ad* cd, *quàm* ae *ad* cf; α *erit etiam permutando major ratio* ab *ad* ae, *quàm* cd *ad* cf: *& per* β *conversionem rationis minor erit ratio* ab *ad* eb, *quàm* cd *ad* fd. *Itaq́ a permutando, minor erit ratio* ab *ad* cd, *quàm* eb *reliquæ ad* fd *reliquam.*

α 23.V.
β 30.V.

PROPOS: XXXIV.

Theorema 34.

Si

Si ſint quotcunque magnitudines *a*,*b*,*c*,& aliæ ipſis æquales numero *d*,*e*,*f*; ſitque major proportio primæ *a* priorum ad primam *d* poſteriorum, quàm ſecundæ *b* ad ſecundam *e*; & hæc major quàm tertiæ *c* ad tertiam *f*, & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul, ad omnes poſteriores ſimul majorem proportionem, quàm omnes priores *b c* relicta prima *a* ad omues poſteriores *e*,*f*, relicta quoq; prima *d*; minorē autem, quam prima priorum *a*, ad primam poſteriorum *d*: majorem denique etiam, quàm ultima *c* priorum ad ultimam *f* poſteriorum.

Quia enim major eſt ratio a *ad* d, *quàm* b *ad* e; *etiā* α *permutando major eſt* a *ad* b, *quàm* d *ad* e *&* β *componendo major* a, b *ſimul ad* b, *quàm* d, e *ſimul ad* e: *rurſusq; permutando major* a, b *ſimul ad* d, e *ſimul, quàm* b *ad* e. *Itaq; cum* ab *tota ad* de *totam habeat majorem rationem, quam ablata* b *ad ablatam* e, γ *etiam reliqua* a *ad reliquam* d *majorem rationem habebit, quam* ab *tota ad* de *totam. Pari modo major erit ratio* b *ad* e, *quàm* bc *ad* ef; *ac proinde multo major* a *ad*

α 27. V.
β 28. V.
γ 33. V.

d, *quàm* bc *ad* ef; *& α permutando major ratio* a *ad* bc, *quàm* d *ad* ef; *& β componendo major* abc *ad* bc, *quã* def *ad* ef; *& rursus permutando, major omnium simul* abc *ad omnes simul* def, *quàm* bc *ad* ef. *Quod est primum.* *Cum igitur totius* abc *ad totum* def *sit major ratio, quam ablati* bc *ad ablatum* ef; *erit etiam reliqui* a *ad reliquum* d *major, quàm totius* abc *ad totum* def. *Quod est secundum.* *Quia etiam major est ratio* b *ad* e, *quàm* e *ad* f; *erit α permutando major quoque* b *ad* c, *quam* e *ad* f; *& β componendo major totius* bc *ad* c, *quàm totius* ef *ad* f. *Cum autem major sit ratio* abc *ad* def, *quàm* bc *ad* ef *ex demonstratis: multò ergò major erit ratio omnium* abc *ad omnes* def, *quam ultimæ* c *ad ultimam* f. *Quod est tertium.*

PROPOSITIO XXXV.

Theorema 35.

Si duabus magnitudinibus *a b*, *cd* majoris inæqualitatis aliæ æquales *be*, *df* addantur; component rationem minorem *ae* ad *cf*: Sin æquales demantur *bg* & *dh*, relinquent rationem majorem *ag* ad *ch*.

α 14. V. *Ponatur, ut* ab *ad* cd, *ita* be *ad* di: α *Erit* be *hoc*

be, *hoc est* gb *major quàm* di: β *ideoq;* cd *ad* di *minorem habebit rationem majorem, quàm ad* df *majorem.* γ *Quare etiam* ab *ad* be *majorem rationem habebit, quàm* cd *ad* df: *&* δ *componendo* ae *ad* be *majorem rationem habebit, quàm* cf *ad* df: *Sed* ε *revertendo* ae *ad* ab *minorem rationem habebit, quàm* cf *ad* cd. *Quare* ζ *permutando* ae *ad* cf *minorem rationem habebit, quàm* ab *ad* cd. *Quod erat propositum. Eodemq; modo altera propositionis pars demonstratur.*

β 8.VI.
γ 13. V.
δ 28. V.
ε 30. V.
ζ 27. V.

Hinc patet: Datæ rationi aliam paulò minorem majoremve dari, æqualis quantitatis additione vel subtractione.



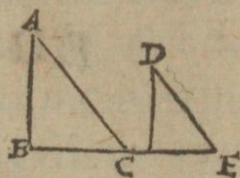


EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER VI.

Definitiones.

I.

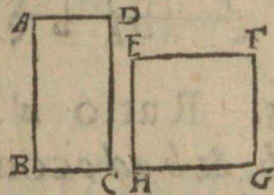
SImiles figuræ rectilineæ ſunt *abc*, *dec*, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent *a*,*d*; *b*,*c*; *c*,*f*; atq; etiã latera quæcircũ æquales angulos,proportionalia, *ut ab ad bc; ita dc ad ce.*



Vtraq; enim hæc in figurarum ſimilitudine, & æqualitatem angulorum, & proportionalita-

litatem laterum oportet cōcurrere. Ideoq́ etiam tantùm habet locum in ejusdem speciei figuris, circulis & circulis, quadratis & quadratis, &c.

2. Reciprocæ figuræ sunt *ab c d* & *e f g h* cum in utraque figura antecedentes *ad, hg* & consequentes *eh, bc* rationum termini fuerint. *Hîc nulla sequitur figurarum similitudo.*

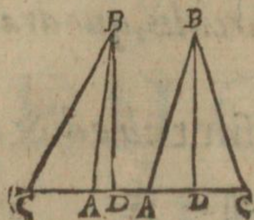


3. Secundum extremam & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum ut tota ad majus segmentum; ita majus ad minus se habuerit.

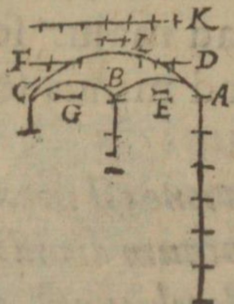
Extrema & media ratione est in extremum & medium terminum dividi. Quæ prorsus in 30 propos. docebitur & alijs verbis in 11.II. est tradita. Ex usu autem maximo in stereometria potissimum, quod libro 13. constabit, dicta est divina hæc proportio.

4. Altitudo *b d* cujusque figuræ *abc* est linea perpendicularis à verti-

ce *b* ad basin *a c* deducta. *Hinc æquæ altæ dicuntur figuræ quarũ perpendiculares sunt æquales, ita enim etiam consistere possunt intra duas parallelas sua basi & vertice.*



5. Ratio *a* ad *c* ex rationibus *a ad b*, & *b ad c* componi dicitur, cum rationum *a ad b* & *b ad c* quantitates *denominatores d ad e & f ad g*, inter se multiplicatæ *d in f* & *e in g*, aliquam effecerint rationem *a ad c*.



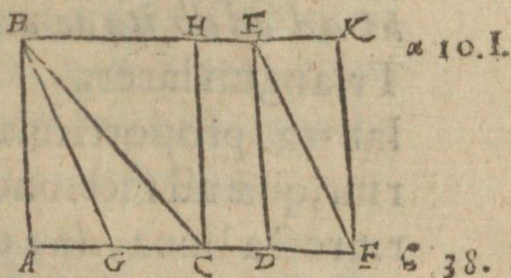
Quantitas rationis est denominator proportionis dictus, quod indicet quãta sit magnitudo antecedens respectu consequentis. Ex duabus ergo vel pluribus rationibus componi dicitur ratio, quando ipsarum denominatores inter se multiplicati eam efficiunt. Vt duodecupla componatur ex dupla & sextupla, quia denominator duodecuplæ proportionis producitur ex mul-

multiplicatione denominatorū duplæ 2. & sextuplæ 6. Ideoq́ quotcunq́ magnitudinibus ordine positis, ratio extremorum componitur ex rationibus intermediorum.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Triangula *abc*, item *def* parallelogramma *ahdk*, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases *abc ad def*, & *ah ad dk*, *ut ac ad df*.



Esto basis ac *dupla ad basin* df, & α *secetur bifariam in* g, *connectaturq́* g *ad* b. *Erunt Triangula* abg gbc & def β *æqualia & Triangulum* abc *duplum Trianguli* def, *videlicet ut basis* ac *ad basin* df, *ita Triangulū* abc *ad Triangulum* def. *Quod primum est. Ita etiam cum parallelogramma* ah & dk *sint* γ *dupla Triangulorum* abc & def; δ *erit ut* abc *ad* def *ita parall.* ah *ad* dk *parall. Quare etiam* ε *ut basis* ac *ad basin* df, *ita parall.* ah *ad parall.* dk. *Quod est secundum.*

α 10. I.
β 38. I.
γ 41. I.
δ 15. V.
ε 11. V.

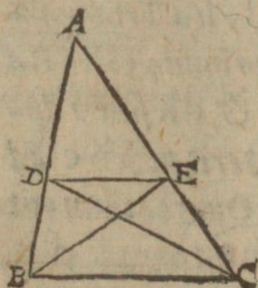
Hinc patet Corollarium. Triangula item parallelogrãma quæ æquales habẽt bases, sunt ut altitudines. *Si enim bases sumantur pro altitudinibus, tum ex prima hujus patet propositum.*

PROPOS: II.

Theorema 2.

Si ad unum Trianguli *a b c* latus *b c* parallela ducta fuerit recta quædam linea *d e*, hæc proportionalite *ut a d ad db, ita ae ad e c* secabit ipsiur Trianguli latera. Et si Triangul latera proportionaliter secta fuei rint, quæ ad sectiones adjuncta fuerit recta linea, *de*, erit ad reliquum ipsius Trianguli latus *bc* parallela.

α 37.I.
β 7.V.



Ducantur rectæ be, c d. *Est enim ut* α *æqualia Triangula* dbe *&* dce β *ad Triangulum* dae; γ *ita bases* b d *ad* da, δ *&* ce *ad* e a. *Quod est primum. Et rursus: ut basis* bd *ad basin* da; γ *ita* bed *ad* e a d: *Qua-*

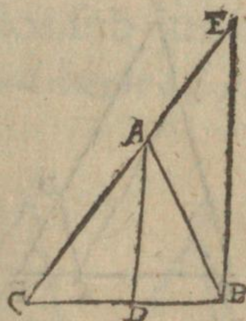
γ I.VI.
δ II.V.

d: *Quare Triangula* bed *&* ced *erunt æqualia,* ε 9. V.
eritq; de *ipsi* bc *parallela: Quod est secundum.* ζ 39.1.

PROPOS: III.

Theorema 2.

Si Trianguli *bac* angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea *ad* secuerit & basin: basis segmenta *bd*, ad *dc* eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius Trianguli latera *ba* ad *ac*. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius Trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat Trianguli ipsius angulum.



Per punctum b *agatur ipsi* ad *parallela* be, *concurrens cum* ca *producta in* e. *Quia ergò* α *sunt æqualiter anguli* dab *&* abe; dac *&* e; *erunt quoq; his oppositæ latera* ea *&* ab *æqualia, Quare* β *ut* e a, *hoc est* ba *ad* ac, *ita* b d *ad* dc. *Quod primum, Rursus etiam est, ut* b d *ad* dc *ita*

α ex hypot. & 29.
β 2. VI.

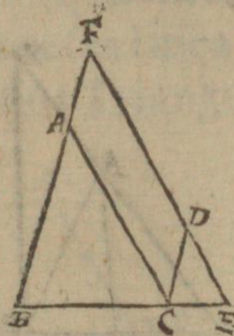
dc *ita* ba *vel* ea *ad* ac ; *erunt rectæ* ba *&* ea $^{\gamma}$ *æquales anguli* eba *&* bad , e *&* dac *erunt* $^{\delta}$ *æquales. Angulus nimirum* a *bifariam est sectus per* da . *Quod erat propositum.*

δ 5.I.

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Aequiangulorum *abc,def* Triangulorum proportionalia sunt latera, *ut ab ad bc;ita cd ad de, ut bc ad ca; ita ce ad ed,ut ba ad ac; ita cd ad de,* quæ circum æquales angulos, *b & dce, b ca & e, a & d,* & homologa sunt latera, *ab ad dc,bc ad ce,ac ad de,* quæ æqualibus angulis *bca & ea & cd, b & dce,* subtenduntur.



Sint bases bc *&* ce *Triangulorum & secundum angulorum æqualitatem similiter positorum,in directum. & concurrant* ba *&* ed *productæ in* f. *Quia ergò anguli* dce *&* b,*item* acb *&* e *sunt æquales,* $^{\alpha}$ *erunt parallelæ* bf *&* cd ; *item* ac *&* ef, *&* acdf $^{\beta}$ *parallelogrammum.* $^{\gamma}$ *Erit ergò ut* ba *ad* af, $^{\delta}$ *hoc est*, cd, *ita* bc *ad* ce; *&* $^{\varepsilon}$ *permutando ut* ab *ad* bc, *ita* dc *ad* ce. *Rursus erit*

α 28.I.
β 34.I.
γ 2.VI.
δ 7. V.
ε 16.V.

γ erit etiam, ut bc ad ce, ita fd δ hoc est, ac ad de, & ε permutando ut bc ad ca, ita ce ad ed. Erit ergò etiã ex ζ æquali, ut ab ad ac; ita cd ad de. ζ 22. V.

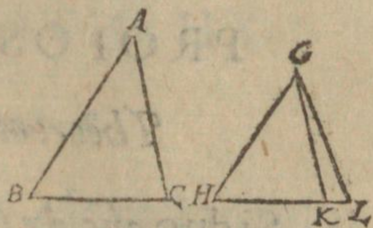
Corollarium.

Hinc patet: Recta ac uni laterum fe Trianguli bfe parallela, aufert Triangulum bac, η Simile toti bfc η Aequales enim sint anguli f & a, e & c & b communis. Quare latera θ proportionalia & ipsa Trianguli ι similia. η 29. I. θ 4. VI. ι 1. def. VI.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si duo *abc, hgk* Triangula latera proportionalia habeant, *ut ab ad bc; ita gh ad hk, ut bc ad ca, ita hk ad kg, ut ba ad ac, ita hg ad gk*, æquiangula erũt Triãgula, *a & g, b & h, c & k*, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera *bc ad hk, ac ad gk, ab ad gh* subtenduntur.



Conversa praecedentis. Si Triangulo a b c *non Triangulum* hgk, *sed* hgl *esset æquiangulum:* α *Essent ergò* gh *ad* h l, β *sicut &* gh *&* hk, *ut* ab *ad* bc; *&* h l γ *æquale ipsi* hk; *totum parti. Quod absurdum.* α 4. VI. β ex hypot. γ 9. V

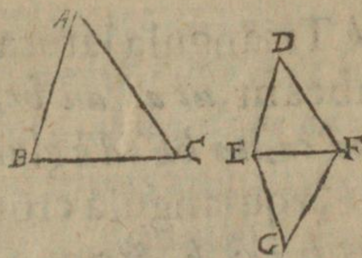
PRO-

PROPOS: VI.

Theorema 6.

Si duo *abc,def* Triangula unum *b* angulum uni *e* angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, *ut a b ad bc, ita de ad ef*, habuerint: æquiangula erunt Triangula, æqualesque habebunt *a* & *d*, *c* & *f* angulos, sub quibus homologa *bc ad ef, ab ad de*, latera subtenduntur.

α 23.l.
β 32.l.
γ 4.VI.
δ ex hypot.
ε 9.V.
ζ 4.l.



Ad e f *rectæ puncta* e *&* f *fiant anguli æquales angulis* b *&* c β *Erit etiam* g *æqualis* a; *& Triangula* a b c *&* e f g *æquiangula.* γ *Ideoq́; ut* ab *ad* bc, *ita* ge *vel* de *ad* e f; *eruntq;* ge *&* de ε *æquales; & reliqui anguli reliquis angulis, & Triangula* abc, def *æquiangula.*

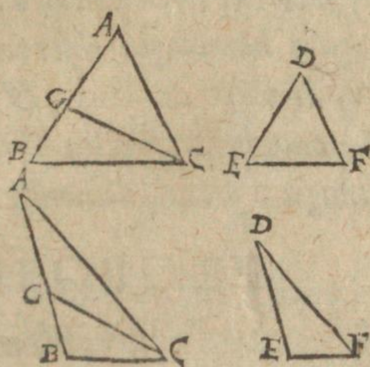
PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si duo *abc, def* Triangula unum *a* an-

a angulum uni *d* æqualem, circum autem alios angulos *c*&*f* latera proportionalia habeant; *ut a c ad cb, ita df ad fe*: reliquorum verò ſimul utrùmque *b* & *c* aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt Triangula, & æquales habebunt eos angulos, *c* & *f*, circum quos proportionalia ſunt latera.

Eſto primùm uterq; tertius angulus b *&* e *acutus. Si* abc *&* def *non ſunt æquiangula* α *fiat angulus* agc *æqualis angulo* e; β *erit ergò* b g c *obtuſus, & γ ut* d f *ad* f e, *ita* ac *ad* γ cg *&* cb *&* *ſic* g c *&* cb, *anguliq; ad baſin* bg *ſunt* ε *æquales; obtuſus acuto Quod abſurdum. Idem abſurdum ſequitur, ſi* b *&* e *anguli ſint obtuſi.*



α 23 1.
β 13.1.
γ 4. VI.
δ ex hypot.
ε 5.1.

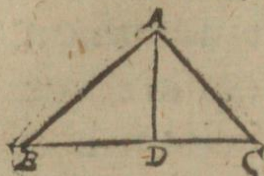
PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Si in Triangulo *abc* rectangulo, ab angulo *a* recto in baſin *bc* perpen-

K dicu-

dicularis *ad* ducta sit: quæ ad perpen-dicularem Triangula *bda* & *adc* tum toti *bac* Triangulo, tum ipsa inter se similia sunt, *bda* & *adc*.

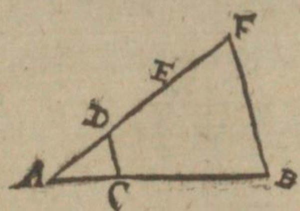


Quia enim bac & bda *rectangula præter angulum rectum & communem habent* b, *etiam tertius, tertio est* α
α 32. I. *æqualis, & Triangula*, *illa sex equiangula late-*
β 4. VI. *raq; βhabent circa æquales angulos proportionalia,*
γ 1. def. VI. *laterum homologia observata, videlicet, ut* cb *ad* ba, *ita* ab *ad* bd; *& ut* ba *ad* ac. *ita* bd *ad* da. *Itaq; sunt γsimilia Triangula. Eadem etiam Triangu* dac *est demonstratio.*

PROPOSITIO IX.

Problema I.

A data recta *ab* linea imperatam partem auferre, *ag*.



Auferenda sit pars tertia, Ex a *ergò ducatur sub quovis angulo recta infinita* ac, *ex qua auferantur tres æquales*
α 31. I. *partes* ad, de, ef, *&* f *conne-*
γ 2. VI. *ctatur cum* b, *cui per* d *agatur* α *parallela* dg. *Erit*
γ 18. V. ag *pars tertia desiderata. Quia enim est*, β *ut* ad *ad* df, *in* ag *ad* gb; *erit* γ *componendo; Vt tota* af *ad*

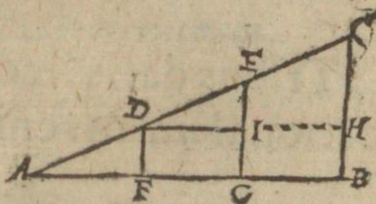
af *ad partem* ad*;ita data* ab *ad partem desideratam* ag. *Quod erat faciendum,*

PROPOSITIO X.

Problema 2.

Datam *ab* rectam lineam insectam similiter secare, ut data altera *ac* recta secta fuerit *in d & e.*

Efficiant duæ rectæ ab *&* ac *angulum quemcunq;* a, *& ducatur* cb, *cui per* d *&* e *α agantur parallelæ* eg *&* df: *item per* d *ipsi* ab *parallela* dh. *Est ergò* β *ut* ad *ad* de, *sic* af *ad* fg: *item ut* de *ad* ec; *ita* di *ad* ih, γ *id est,* fg *ad* gb: *atq; ita* ab *ipsi* ac *similiter secta. Quod erat faciendum.*



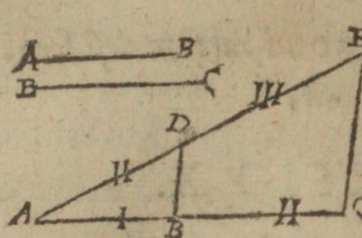
α 31.I.
β 2. VI.
γ 34.I.

PROPOSITIO XI.

Problema 3.

Duabus datis rectis lineis *ab bc*, tertiam proportionalem adinvenire.

Datæ duæ rectæ a b, bc *ponantur in directum, & quovis angulo* c a e *ducatur recta*



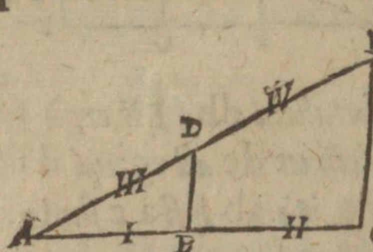
α 31. I.
β 2.VI.

infinita ae, *à qua abscindatur* a d *æqualis ipsi* bc *ductæq;* d b *agatur* ce α *parallela per* c. β *Erit ergò, ut* ab *prima ad* bc *secũdam; ita huic æqualis* ad, *ad* de *tertiam quæsitam.*

PROPOSITIO XII.

Problema 4.

Tribus datis lineis, quartam proportionalem invenire.



Datæ duæ a b *prima, &* bc *secunda ponantur in directum, & quovis angulo* cae *ducatur recta infinita, in qua sumatur tertia* a d

α 31.I.
β 2.VI.

ductæq; db *parallela* c e *per* c α *agatur.* β *Erit ut* ab *prima, ad* bc *secundam; ita* ad *tertia, ad* d e *quartam quæsitam.*

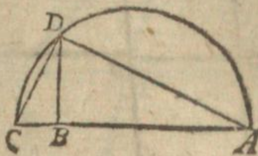
PROPOSITIO XIII.

Problema 5.

Duabus *a b, b c,* datis rectis, mediam

diam proportionalem adinvenire.

Datæ duæ rectæ ab, bc *ponantur in directum, & super tota* ac *describatur semicirculus* adc, α *erigaturq́; ex* b *perpendicularis* bd, *& ducantur* a d, cd. *Erit ergo* adc *in semicirculo rectus; &* db *perpendicularis efficit duo Triangula* abd *&* cbd γ *æquiangula. Ideoq́;* δ *proportionalia, Vt* ab *ad* bd, *ita* bd *ad* bc. *Est ergo* bd *media proportionalis.*



α 11. I.
β 31. III.
γ 8. VI.
δ 4. VI.

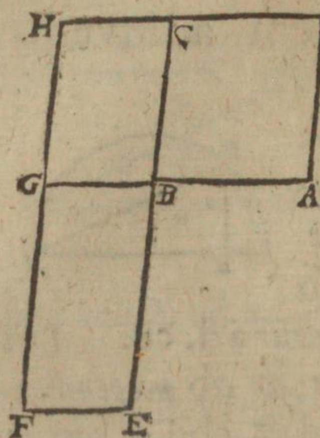
PROPOSITIO XIV.

Theorema 9.

Aequalium, & unum *abc* uni *ebg* æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, *bd, bf*, reciproca sunt latera, *ut a b ad bg; ita eb ad bc* quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum *bd bf* unū *abc* angulum uni *e b g* angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia *bd, bf.*

Ponantur anguli æquales ita, ut fiant verti-

α 14. I.



cales ad b, *& ita* α *in directum erunt* ab, b g, *item* bc, *&* be: *compleaturq;* *gnomon* ahe. *Habebunt æqualia parallelog.* bd *&* bf β *eandem rationem ad* bh, *quam bases* a b *ad* bg, *&* be, *ad* bc *i. e. sunt* δ *reciprocæ. Contra sint latera circum æquales angulos ad* b *reciprocè proportionalia, ut* ab *ad* bg, *ita* be *ad* bc, *erunt parall.* bd *&* bf *æqualia. Habent enim* bd *&* bf *ad* bh ε *eandem rationem. Ideoq;* *sunt* ζ *æqualia.*

β 7. V.
γ 1. VI.
δ 2. def. VI.

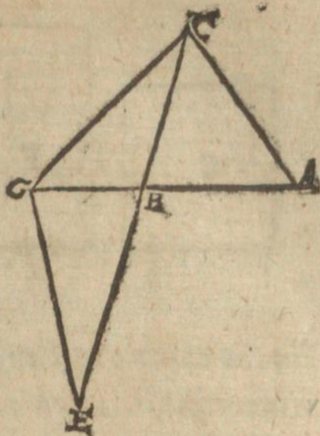
ε 1. VI.
ζ 9. V.

PROPOSITIO XV.

Theorema 10.

Aequalium, *abc, ebg*, & unum *abc* uni *ebg* æqualem habentium angulum, Triangulorum, reciproca sunt latera, *ut ab ad bg, ita eb ad bc*, quæ circum æquales angulos. Et quorum Triangulorum *a b c, e b g*, unum angulum *abc* uni *ebg* æqualem habētium reciproca sunt latera, *ut ab ad bg; ita e b ad b c*, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

De-



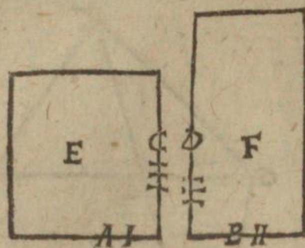
Demonstratio cum priore coincidit, quod Parallelogrãma sint Triãgulorum dupla. Rursum ergò anguli æquales fiant verticales, ut ab, bg *&* cb, be *sint* α *in directum, & ducatur* cg. *Erit ut æqualia Triangula* abc *&* ebg *ad Triangulum* cbg, γ *ita bases erunt ad bases,* δ *ut* ab *ad* bg, *ita* eb *ad* bc, *id est, reciprocè. Et contra: Lateribus datis reciprocis vel ε basibus, Erit ut æquales rationes datæ basiũ* ab *ad* bg, *vel* eb *ad* bc, *ita* ε *triangulum* acb, *vel* bgc *ad triangulum* bcg; *Ideoq; triangula* acb *&* beg, *erunt* ζ *æqualia. Quod erat ostendendum.*

α 14. I.
β 7. V.
γ 1. VI.
δ 11. V.
ε 1. VI.
ζ 9. V.

PROPOS: XVI.

Theorema 11.

Si quatuor rectæ lineæ *a, bdc* proportionales fuerint: *ut a ad b; ita d ad c* quod sub extremis *a* & *c* comprehenditur rectangulũ *e*, æquale est ei, quod sub medijs *b* & *d* comprehenditur, rectãgulo *f*. Et si sub extremis *a* & *c* cõprehensum rectangulũ *e* æquale fuerit ei *f*, quod sub medijs *b* & *d* continetur, rectangulo: illæ 4. lineæ rectæ *a, b, ac* proport. erũt *ut a ad b, ita d ad c.*



Quia enim, 4. datæ rectæ proportionales, ut a *ad* b, *ita* d *ad* c; *ponũtur in duobus rectangulis* e *&* f, *circa æquales rectos* α *reciprocæ; erunt rectangula* e *&* f β *æqualia. Et contra rectangula* e *&* f *æqualia habebunt circa æquales angulos latera reciproce proportionalia, ut* a *ad* b, *ita* d *ad* c; *& ut* a *ad* d, *ita* b *ad* c. *Idem de Rhombo & rhomboide verum est in hac & sequenti proportione.*

α 2. def. VI.
β 4. VI.

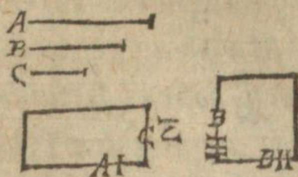
PROPOS: XVII.

Theorema 12.

Si tres rectæ lineæ ſint proportionales: *ut a ad b; ita b ad c*; quod ſub extremis *a* & *c* comprehenditur rectangulum *e*, æquale eſt ei, quod à media *b* deſcribitur, quadrato *f*; Et ſi ſub extremis *a* & *c* comprehenſum rectangulum *e* æquale ſit ei, quod à media *b* deſcribitur quadrato *e*: illæ tres rectæ lineæ *a*, *b*, *c*, proportionales erunt *ut a ad b; ita b ad c.*

Quia

Quia enim media proportionalis b *bis est ponenda, erunt ut in præcedente propositione 4. rectæ circum angulos æquales*



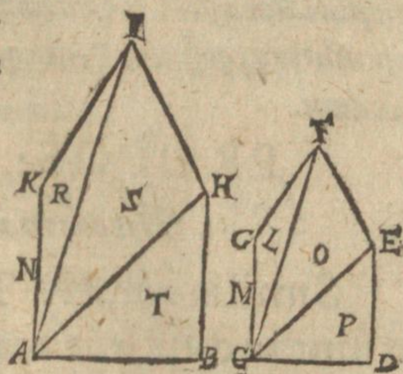
rectos α *reciprocè proportionales. Ideoq; rectangula* & β *æqualia. Et contra, æqualia rectangula circa angulos rectos habent latera* β *reciprocè proportionalia, videlicet, ut* a *ad* b, *ita eadem* b *ad* d. *Quod erat ostendendum.* α 2. def. VI. β 4. VI.

PROPOSITIO XIIX.

Problema 6.

A data recta *a b* linea dato rectilineo *c d e f g m* simile similiterque positum rectilineum *a b h i k n* describere.

Rectilineum datum m *resolvatur in Triangula per lineas occultas* ce, c f, *ex eodem angulo* c. α *Fiant æquales angulis* dce *quidem* h a b, & d *ipse* b; *erunt Triangula* a b h & c d e



α 23. I.

β.2 31. γ4.V. βæquiangula & latera γproportionalia, ut ec ad cd, ita ha ad ab, atq; ita Triangula similia similiterq; posita (secundum eundē situm quoad latera & angulos) Ita Triangulo cef super ah, fiat simile similiterq; positum Triangulum ahi. δ2.ax. & δ erit quadrangulũ abhi, quadrangulo cdef æquiangulum. Ideoq; cum ex similitudine Triangulorum, ex quib. sunt facta, sit ε4.VI. ζ22.V. ε ut cd ad ce, & ce ad cf. ita ab ad ah & ah ad ai, ζ erit ex æquali, ut cd ad cf, ita ab ad ai, latera nimirũ circa æquales angulos sunt proportionalia; & ita etiã quadrangulum abhi simile est similiterq; positum quadrangulo cdef. Deniq; super ai simile similiterq; positum fiat Triangulo cfg Triangulum aik, ε1.def.VI. quod additum quadrangulo efficit pentagonum pentagono me æquiangulum & simile similiterq; positũ. Quia enim rursus ut γ cd ad cf & cf ad cg. ita ab ad ai, & ai ad ak; ζ ergò ex æquali ut cd ad cg, ita ab ad ak: atq; ita circa reliquos angulos reliqua latera sunt proportionalia; & ipsi m simile similiterq; positum Pentagonum. Quod erat faciendum.

PROPOS: XIX.

Theorema 13.

Similia *abc*, *def* Triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorũ. *bc* & *ef* (*hoc est quadrata quã refert*) bc *ad tertiã proport.* bg.

Late-

Lateribus duobus homologis bc *&* ef α *quæratur tertia Proportionalis* bg, *ducaturq́;* ag. *Quia ergo est* β *ut* ab *ad* bc, *ita* de *ad* ef; *ergò* γ *permutando, ut* ab *ad* de, *ita* bc *ad* ef; *&* δ *ita* ef *ad* bg *videlicet reciprocando circa æquales angulos* b *&* e. *Itaq;* ε *æqualia erunt Triangula* bag *&* def, *ad quæ utraq;* ζ *eandem habet rationem* abc; *eam videlicet* η *quæ est basis* bc *ad basin* bg, *id est, primæ* bc *ad tertiam* bg, θ *duplicatam rationem homologorum laterum* bc *ad* ef. *Itaq; etiam triangula* bac *&* def ι *habebũt rationem duplicatã homologorum laterum.*

α 11. VI.
β 4. VI.
γ 16. VI.
δ ex constr. & 11. V.
ε 15. VI.
ζ 7. V.
η 1. VI.
θ 10. def. V.
ι 11. V.

Hinc patet. Si tres bc, ef, bg, *rectæ sint proportionales, ut* dc *ad* ef, *ad* bg, *ut est prima,* bc *ad tertiam,* ef, *ita est Triangulum* ab *super primam* bc, *descriptum ad Triangulum* def *super secundã* ef, *simile similiterq́; descriptum: Ita etiam Triangulum super secundam* ef *ad Triangulum super tertiam* bg.

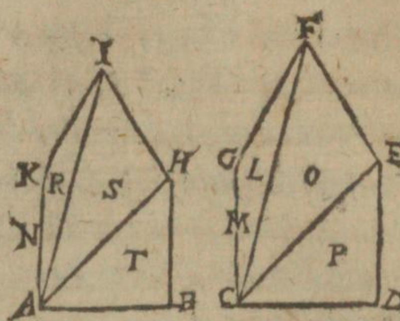
PROPOSITIO XX.

Theorema 14.

Similia polygona *m & n* in similia triãgula dividũtur, *l & r, o & s, p & t* & numero æqualia: & homologa totis:

m & n &

& polygona duplicatam *quadratam* habent eam rationem inter se, quam latus homologum *c d* ad homologum latus *a b*.



Ab angulis æqualibus c *&* a *ad angulos oppositos* f *&* e, h *&* i, *ducantur lineæ dividentes polygona* m *&* n *in terna æqualia Triangula* l o p *&* r s t. *Quæ Triangula bina inter se ut* p *&* t, *quia circum æ-*
α 6. VI. *quales angulos* b *&* d *sunt latera proportionalia,*
β 1.def. VI. *sunt* α *æquiangula &* β *similia* : *Ita cum sit, ex si-*
γ 22.V. *militudine figurarũ*, e c ad d e *&* d e *ad* e f; *ita* h a *ad* h b *&* h b *ad* h i; *etiam ex æquali sit, ut* c e *ad* e f, *ita* a h, *ad* h i, *latera circa residuos æquales angulos ex toto* h *ipsi* e *æquali* ; α *&* β *erunt* o *&* s *Triangula æquiangula æquè similia ac* p *&* t. *Ita deniq;* α *&* β *æquè similia sunt* l *&* r, *ut* p *&* t. *Cum ergò sint in ratione duplicata* p *&* t, *&* o *&* s *& communiũ laterum homologorũ* c e *ad* a h, *Item ut* o *&* s, *sunt etiam* l *&* r *in ratione duplicata communium homologorum laterum* c f *&* a i; *erunt etiam, ut* p *ad* t, *ita* l *ad* r, *&* o *ad* s. *Ideoque etiã ita ut* m *ad* n, *ut* p *ad* t, *id est, Triangula similia sunt etiam homologa ipsis polygonis* ; *Proindeq;*

indeq; ipsa etiam polygona in duplicata ratione laterum homologorum videlicet, cd *ad* ab. *Quod erat propositum.*

Hinc sequitur.

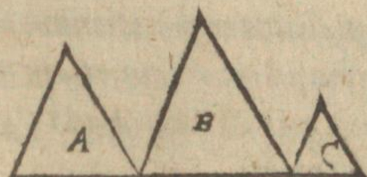
Si tres rectæ sint proportionales ut est prima ad tertiam, ita est figura super primã descripta, ad figuram, super secũdam similem similiterq; descriptam: Et ita figura super secũdam descripta, ad figuram super tertiam similem similiterque descriptam.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 15.

Quæ eidem *a* & *b* rectilineo *c* sunt similia, & inter se *a* *ipsi* *b* sunt similia.

Quia enim utrumq; a *&* b *est simile tertio* c, *eidem erit* α *æquiangulum, & ita* β *inter se erunt æquiangula,* γ *habebuntq; circa æquales angulos latera proportionalia, & inter se erunt* δ *similia. Quod erat propositum.*



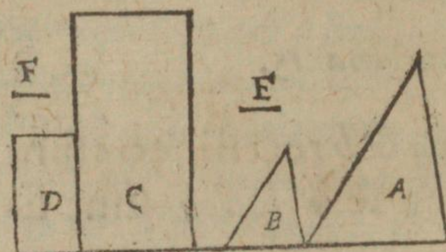
α 1. def. VI.
β 1. ax.
γ 4. VI.
δ 1. def. VI.

PRO-

PROPOS: XXII.

Theorema 16.

Si 4. rectæ proportionales fuerint, *ut prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam*, & ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, proportionalia erunt, *ut a ad b, ita c ad d*. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta proportionalia fuerint rectilinea, *ut a ad b, ita c ad d* : ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt, *prima ad ſecundam, ut tertia ad quartã*.



Quæratur primæ & ſecundæ, tertia proportionalis e, *item tertiæ & quartæ, tertia proport* f. *Aequalium ergò rationum primæ ad ſecundam* & *tertiæ ad quartam, etiam duplicatæ rationes* α *primæ* a *ad* e, *& tertiæ ad* f: β a *ad* b *&* c *ad* d γ *æquales erunt*.

α 10.def.V.
β 19.v.20.VI.
γ 6.ax.

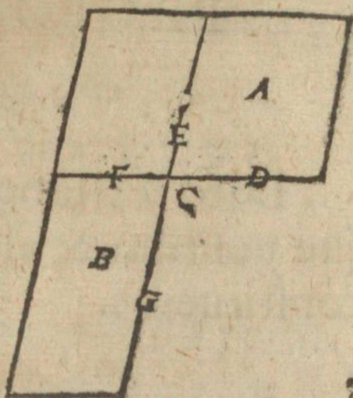
Deinde, ſint figuræ ſimiles ut a *ad* b, *ita* c *ad* d β *duplicatæ ratione homologorum laterum eadem, ut prima ad* e, *ita tertia ad* f; *erunt etiam dimidiatæ rationes eædem, ut prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam. Quod erat propoſitum.*

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 17.

Aequiangula, *ad verticem c*, parallelogramma *a & b* inter se habent rationem eam, quæ ex lateribus cōponitur.



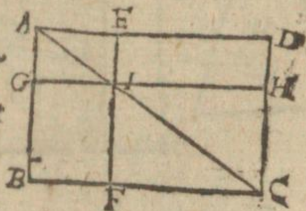
Compleatur parallelogrammum h. *Quia extremorum parallelogrammorum* a *ad* b *ratio* α *componitur ex intermediis*, a *ad* h, *&* h *ad* b, *quibus* β *eædem sunt rationes laterū* d *ad* f *&* e *ad* g : *Itaque ex his* γ *rationibus laterum composita erit ratio* a *ad* b. *Quod erat propositum.*

α 5.def. VI.
β 1.VI.
γ 11.V.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 18.

In omni parallelogrammo, *bd*, quæ circa diametrum *a c* sunt parallelogrāma, *g e*, & *f h* & toti *bd* & inter se sunt similia.



(*Diagonale est, quod & angulos & diagonium habet communem cum toto*)

α *Aequales n. sunt anguli* aig *&* eai, cih *&* icf; *Item anguli* gai; aie, fic *&* ich

α 29.I.

β an-

β 34. I. *β anguli item,* e, g, h, f; *ideoq́; 4. illa Triangula sunt æquiangula, & latera habent circum æquales angulos γ proportionalia ut* ae *ad* e i, *ita* i h *ad* hc, *& ut* a g *ad* g i; *ita* i f *ad* fc. *Sunt ergò Diagonalia & inter se & toti similia.*

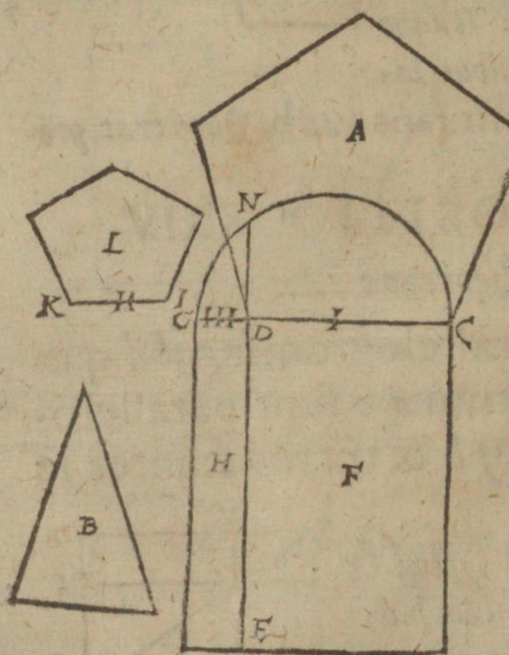
γ 4. VI.

PROPOS: XXV.

Problema 7.

Dato rectilineo simile, similiterque positum & alteri dato æquale, constituere.

α 44 v. 45. I.



Dato rectilineo a cui construendum est simile ad latus c d *sub angulo quovis* c de *α applicetur parallelogrammum* f *æquale; rursusq́; ad hujus latus* d e *sub angulo contiguo* edg *applicetur parall.* h *æ-*

h *æquale rectilineo* b, *cui æquale est construendum.* *Inter* cd *&* d g β *quæratur media proportionalis* dn *vel* ik, *super qua rectilineo* a *simile rectilineũ* l γ *construatur, quod erit æquale ipsi* b. *Quia enim est, ut prima* cd *ad tertiam* d g, δ *ita* f *ad* h, ε *id est,* a *ad* b, ζ *&* a *ad* l; *etiam ex* η *æquali est* l *æquale ipsi* b, *quod etiam est constructum simile ipsi* a. *Quod erat faciendum.*

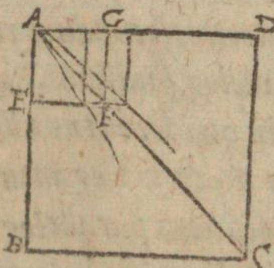
β 13. V.
γ 18. VI.
δ 1. VI.
ε ex const. & 7. V.
ζ 11. V.
η 22. V.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 19.

Si à parallelogrammo *b d* parallelogrammum ablatum sit *e g*, & simile toti & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum *a c* consistit.

Si quis e i *dicat diagonale,* α *erit illud simile toti* bd. *Itaq;* β *ut* b a *ad* a d; *ita* ea *ad* ag γ *&* a i *æqualia partem & totum. Quod absurdum. Igitur non* e i, *sed* e g *est diagonale. Quod erat demonstrandum.*

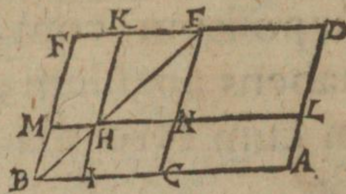


α 24. VI.
β 1. def. VI.
γ 9. V.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 20.

Omnium ***ae, ah*** parallelogrammorum ad eandem rectam ***ab*** applicatorum, deficientiumque parallelogrammis ***cf*** &***im*** similibus similiterque positis, ei ***ae*** quod à dimidia ***ac*** describitur; maximum id est ***ae***, quod ad dimidiam applicatur parallelogrammum simile existens defectui ***im***.



Addatæ ab *dimidiam* ac *quodcunq; constituatur parallelogrammum* ae, *& à completo parallelogrammo* a f *deficiat* ae *simili parall.* c f, *dico* ae *esse maximũ applicatorum secundum rectum* a b, *deficientiumq; parallelog. similibus. Postea enim ducatur* Diagonius be *in qua servatur ubicunq; punctum* h, *per quod ipsis* ab *&* b f *agantur parallelæ* l m *&* k i. *Erit*
α 24. VI. ah *deficiens parallelogr.* α*simili* i m *minus* ae β *vel*
β 43. I. cf. *Quia enim cõplementa* ch *&* hf *sunt* γ *æqualia*
γ 34. I. *erit* nf *vel* δnd ε *majus, quàm* ch, *additoq; commu-*
δ 36 I. *ni* an, *erit* ae *totum majus toto* ah. *Quod erat pro-*
ε 9. ax. *positum.*

PROPOSITIO XXIIX.

Problema 8.

Ad datam lineam *a b* rectam, dato rectilineo *c* æquale parallelogrammum *c* applicare, deficiens figura parallelogramma *d*, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato *d*. Oportet autem datum rectilineum *c*, cui æquale applicandum est, non majus esse eo *a f*, quod ad dimidium applicatur, cum similes fuerint defectus & ejus, quod ad dimidiam applicatur, & ejus cui simile *e g* & *o q* deesse debet.

Super dimidia eb *α fiat parallelogrammum* eg *simile* d, *compleatur* a g *&* *ducatur* f g. *si* c *æquale fuerit* α 18.VI.
parallelogrammo a f *vel* e g, *factum est, quod jubet propositio. Sin minus &* a i *sit minus* a f, *tum excessui* k *β construatur æquale* β 25.VI.

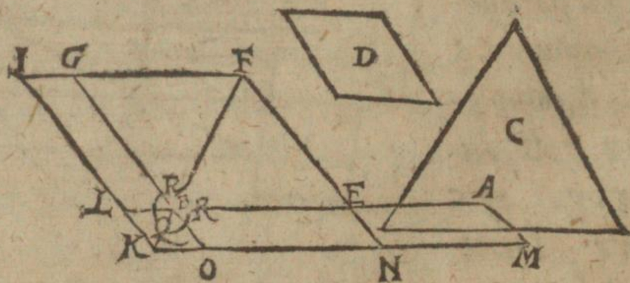
γ 26.VI. *parallelog. ipsi* eg *vel* d *simile similiterq; positum;* γ *eritq;* l n *ex* eg *secũdum communem angulum allatum diagonale ipsius* eg, *Completa tota figura* ponq: *Dico* a m *ipsi* c *æquale esse.*

δ ex constr. *Ablatis enim ab* δ *æqualibus* a f *&* c g, δ
ε 3.ax. *æqualibus* k *&* l n, ε *relinquitur* ai *vel rectilineum*
ζ 43.& 36.I. c *æquale gnomoni* rst; *vel* ζ *huic æquale parallelo-*
η 24.VI. *grammo* oq η *simili similiterq; posito ipsi* eg *vel dato* d. *Quod erat faciendum.*

PROPOS: XXIX.

Problema 9.

Ad datam rectam *ab*, dato rectilineo *c*, æquale parallelogrammum *ml* applicare, excedens parallelogrãmo *ol*, quod simile similiterque sitũ sit alteri dato *d*.



α 18.VI. *Ad datæ* ab *dimidiam* eb *applicetur* α *parall.*
β 25.VI. eg, *simile similiterq; situm dato* d. *Deinde* β *fiat,*

paral-

parallelogrammum ni *æquale duobus rectilineis* c & eg, *simile verò eidem* eg; *erit* eg *diagonale*, γ *ipsius* ni; *inverta nimirum recta* fi *ponatur homologa lateri* fg & *compleatur figura* ak ge. *Dico* ml *æquale esse ipsi* c. γ 26.VI.

Aequalia enim erunt rectilineo c *gnomon* δ pgr & *parallelog.* ml, *quod excedit datā* ab *parallelogrammo* ol, *simili similiterq́;* ε *situ, ipsi* eg, *sive dato* d. *Quod erat faciendum.* δ ex constr. ε 36.&43.I & 2.ax.

PROPOS: XXX.

Theorema 10.

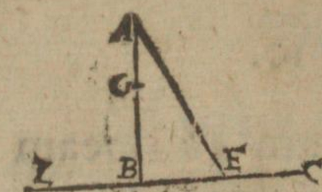
Propositam rectam *ab* lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

A data ab α *describatur quadrangulum* bd, *cui ad rectam* cb *applicetur* β *æquale parallelogr.* ml *excedens ipsam* cb *similiter quadrato* ol (*super dimidia nimirū,* bc *cōstruatur quadratum* eg, & *ducatur* ea, *quæ erit latus quadrati* fk, *quod quadratis duobus* bd & α 46.I. β 29.VI.

v 47.1. *eg est* v *æquale. Ideoq; ipsi* ea *sit similis* f i *homologa lateri* fg, *& compleatur Figura*, f m l) *Dico* ab *sectam esse proportionaliter.*

δ 3.ax. *Si enim ab æqualibus* bd *&* l m *auferatur commune* mb, δ *relinquetur rectangulum* d o *sub tota* ad *sive* ab *& segmento* a o *comprehensum æquale quadrato* o l *facto a segmento* ob. *Ideoq; tres rectæ* a b, bo *&* oa *sunt* ε *proportionales, adeoq;* ab *in* o ζ *secta secundum mediam & extre-*

ε 17.VI.
ζ 3. def. VI. *mam rationem. Quod erat faciendum.*



In praxi commodissimè adhibetur 11. II. ut ad datam ab *ad punctum* b *erigatur perpendicularis æqualis* bc, *quæ secetur æqualiter in* e, *intervalloq;* ea *ponatur æqualis* e l, *& ipsi* b l *æqualis* bo, *erit* o *sectio ipsius* ab.

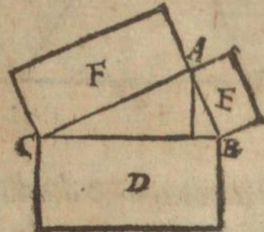
PROPOS: XXXI.

Theorema 21.

In rectangulis *abc* triangulis, figura *d* quævis, à latere *bc* rectum angulum *bac* subtendente descripta, æqualis est figuris *e & f*, quæ priori illi similes, & similiter positæ, à lateribus

bus *ab* & *ac* rectum angulum continentibus deſcribuntur.

Quia enim bis ternæ ſunt α *proportionales* bc, ba bg; & bc, ca, cg *: erit, ut* bc *ad* bg *ita* d *ad* β e, *item ut* bc *ad* cg, *ita* d *ad* f. *Eſt autem recta* bc *æqualis ipſis* bg & gc *ſimul ſumtis : Ideoq;* & *figura* d *æqualis erit figuris* e & f *ſimul ſumtis. Quod erat oſtendendum.*

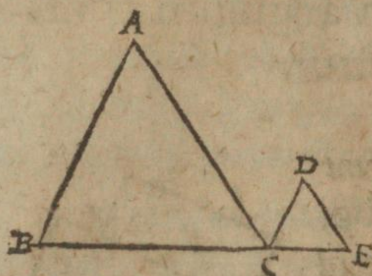


α 8. VI.
β cor. 20. VI

PROPOS: XXXII.

Theorema 22.

Si duo triangula, *abc*, *dec* quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, *ut ba ad bc, ita cd ad de* ſecundum unum angulum *acd* compoſita fuerint, ita ut homologa eorum latera ſint etiam parallela *ba* & *cd*, *ac* & *de* : tum reliqua illorum triangulorum latera *b c* & *c d* in rectam lineam collocata reperientur.



α 29. I. β 6. VI. *Quia enim æquales sunt anguli α alterni* acd, d *&* a; β *erunt Triangula æquiangula & d ce & b æquales; quibus adduntur æquales alterni* acd *&* a, *erit totus* ace *duobus* b *&* a *æqualis; rursumq; addito communi* acb, γ *erunt duo* acb *&* ace *tribus trianguli* abc *angulis, hoc est, duobus* δ *rectis æquales: Ideoq; bases* bc, ce *erunt in* ε *directum seu linea una* be. *Quod erat ostendendum.*

γ 2. ax. δ 32. I. ε 14. I.

PROPOSITIO XXXIII.

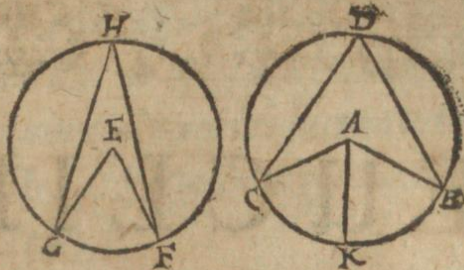
Theorema 23.

In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs *bc* & *fg*, quibus insistunt, sive ad centra *bac*, *feg*, sive ad peripherias *bdc*, *fhg* constituti insistant: Insuper verò & sectores *bca* & *fge*, quippe qui ad centra consistunt.

α 30. III. β 27. III. γ 41. V

Sit enim duplus arcus bc *ipsius* fg *&* bc α *secetur bifariam in* f *per rectam* ak : *Erunt anguli* bak, kac, feg *æquales; ideoq; totus* b a c *duplus anguli* feg, γ *hoc est, ut arcus* b c *ad arcum* f g; *ita*

ita angulus ad centrum b a c *ad alterum* f e g. *Quia verò bis ad centrum* δ *duplis* ε *proportionales sūt*



δ 20.III.
ε 15. V.

anguli ad peripherias d & h, *rursus* ζ *erit: ut arcus* bc *ad arcum* fg, *ita angulus* d *ad angulum* h. ζ 11.V.
Deniq; sectores bka, kca, fge *sibi mutuò congruentes erunt* η *æquales, ideoq; & sector* bca *duplus erit sectoris* fg e, *id est,* θ *sector ad sectorem est, ut arcus* bc *ad arcum* fg. η 8. ax. θ 4. def.V.

Corollarium. 1.

Vt angulus ad angulum, κ sic sector ad sectorem. κ 11.V.

Corollarium 2.

Vt angulus in centro ad 4. rectos; λ ita arcus eidem angulo subtensus ad totam peripheriam scil. 4. rectos subtendentem. λ 33. VI.



EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER VII.

Definitiones.

1.



Nitas est, secundum quam unumquodque eorum, quæ sunt, unũ dicitur. *Ita secundũ unitatem, unam dicimus ulnam, unũ corpus, &c. Hæc indivisibilis esse concipitur, ut & punctum.*

2. Numerus autem ex unitatibus composita multitudo. *Ita 7 ex septem unita-*

unitatibus ceu partibus constat. Quæ earundem partium ut unitatum participatio facit, ut omnes numeri sint inter se commensurabiles. Quod magnitudinibus negatum est.

3. Pars est numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem. *Ita 5 est numeri 20 pars, quæ tamen denominationem habet ab eo, per quem metitur numerum, cujus est pars, ut 5 est pars quarta 20, quia metitur illũ per 4.*

4. Partes autem, cum non metitur. *Si nimirum minor majorem non metiatur, ut 5 numerum 18, tum ipsius non pars sed partes dicitur, quia continet quinq; unitates, quæ singulæ sunt decimæ octavæ partes numeri 18. Nomen partium est ex illis numeris, per quos communis mensura utrumq; metitur, ut cum 3. metiatur & 6 partes & 9, cujus nõ est partes, per 2 & 3, senarius dicitur duæ tertiæ partes novenarij Euclides partes retinuit in magnitudinibus lib. V. quia non quælibet magnitudo alteri inæqualis vel*

pars

pars vel partes est, quia sæpè sunt incommensurabiles.

5. Multiplex verò major minoris, cum majorem metitur minor. *Talis est omnis qui partes habet aliquotas, Vt 9. multiplex est 3.*

6. Par numerus est, qui bifariam dividitur. Ut 24.

7. Impar verò qui bifariam non dividitur; vel qui unitate differt à pari: *Vt 3.5.7. Vnde indivisibilem hic intelligi debere unitatem constat, aliàs quilibet numerus esset par. Vt 3. haberet dimidium* $1\frac{1}{2}$ *unitatem cum semisse.*

8. Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem; *Vt 24. est pariter par, quia 4. eum metitur per 6. parem.*

9. Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per imparem: *Vt 24, etiam est pariter impar quia 8. metitur, illum per 3. imparem. Ideóque multi sunt numeri, qui & pariter pares & pariter impares sunt.*

10. Impariter verò impar numerus

rus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem. *Vt 21. metitur 3. per 7.*

11. Primus numerus est, quem unitas sola metitur. *Tales sunt, qui nec pariter nec impariter pares vel impares possunt dici, ut 2.5.7.*

12. Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas communis mensura metitur. *Etiam intelliguntur numeri, qui per se primi non sunt modò ut inter se præter unitatem nullam habeāt communem mensuram, ut 7.10. 15. sunt inter se primi.*

13. Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur. *Sic 15. est compositus numerus, quia illū & 5. & 3. metiūtur. Omnes primi præter binarium sunt impares & omnes pares præter binarium compositi.*

14. Compositi autem inter se sunt numeri, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur. *Etiam de ijs accipitur, qui per se compositi non sunt, ut 7.14.21 quia 7. eos metitur.*

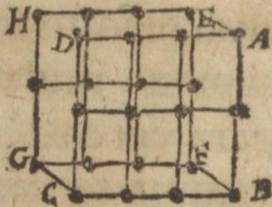
15. Nu-

14. Numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis: *Vt 4 dicetur multiplicare 5, si quinarius fuerit quater compositus, quot in 4 sunt unitates, &c. Inde constat productum habere ad alterum multiplicantium eandem rationem quam alter ad unitatem, quia toties continet, quot alter continet unitates. Vt ratio 20 ad 5 est eadem, quadrupla, quæ 4 ad 1.*

16. Cum autem duo numeri mutuò sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui verò numeri mutuò sese multiplicarint, latera illius dicentur. *Possunt enim ita procreati numeri disponi in formam parallelogrammi rectanguli, cujus latera respondent numeris inter se multiplicatis. Ita 12 est numerus planus, quia ex ductu 3 in 4 nascitur. Reliqua penè infinita planorũ numerorũ genera hic in Euclide nullius usus prætérimus.*

17. Cum

17. Cum verò tres numeri mutuò ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: Qui autem numeri mutuò ſe multiplicarint, latera illius dicentur. *Ut 1, 2. 4 efficiunt 8 numerum ſolidum, cujus baſis* bf 1 *latitudo eſt, longitudo* bc 4, *cui alia baſis ſimilis & æqualis ſuperpoſitæ facit, ut totus numerus habeat 8 & altitudo* ab *duas unitates. Unitas impropriè & planus & ſolidus numerus appellari ſolet, eò quod & ex duabus unitatibus & tribus inter ſe multiplicatis producatur.*



18. Quadratus numerus eſt, qui æqualiter æqualis, vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur. *Ut 16. eſt numerus quadratus, cujus diſpoſitio refert accuratum quadratum cui radix eſt quaternarius.*

19. Cubus verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel qui ſub tribus æqualibus numeris continetur. *Sic 8 eſt cubus, cujus diſpoſitio*

refert

refert accuratum cubum, cujus longitudo, latitudo & altitudo vel latera ſint æqualia, ex quarum multiplicatione numerus producitur.

20. Numeri proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eædem partes: vel certè cū primus ſecundum, & tertius quartum æqualiter continet, eandemq́ue inſuper illius partem vel eaſdem partes. *Vt* $\begin{smallmatrix}6 & 3 & 8 & 4\\ 3 & 6 & 4 & 8\end{smallmatrix}$ *numeri ſunt proportionales, quia primus ſecundi æquè duplus eſt, ac tertius quarti, & rurſum primus ſecūdi æquè dimidium eſt ac tertius quarti. Ita 5.4.10.8. ſunt proportionales quia primus æquè ſecundum continet ſemel cum* $\frac{1}{5}$ *ac tertius quartum.*

21. Similes plani & ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera. *Cum unus planus numerus poſſit varijs modis diſponi, non requiritur, ut in omnibus modis illa reperiatur laterum proportio, ſed ſufficit ut uno queat modo. Ita*

Ita similes sunt planè 6. & 24. quia laterum 2. ad 3. & 4. ad 6. eadem est proportio, etiamsi 3. ad 8. in alia dispositione non habeant eandem. Similiter 9. & 24 sunt similes solidi, quia 8. 6. 4. eandem proportionem, quam 4. 3. 2.

22 Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis. *Loquitur de parte aliquota, de qua & tertia definitio, alias omnes numeri essent perfecti futuri secundum quartã definitionem partium. Ut 6. est numerus perfectus, quia ipsius partes aliquotæ 1, 2, 3. simul sumtæ illum restituunt, ita 28 & 496. Illi in quibus partes aliquotæ simul sunt majores, dicuntur abundantes; Diminuti, in quibus sunt minores. Ad has Euclideas definitiones addit Clavius ex Campano sequentes.*

23. Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus illum producit. *Sic 2 metitur 14 per 7 quia 2 multiplicatus per 7 producit 14.*

24. Proportio numerorum eſt habitudo quædam unius numeri ad alterum, ſecũdum quod illius eſt multiplex vel pars, partesve; vel certè illum continet ſemel aut aliquoties & aliquam inſuper illius partem vel partes. *Sic ſi numerus 24 comparetur cum 6 ea ratione qua ipſius multiplex eſt, nimirum quadruplus, dicetur illa habitudo proportio.*

25. Termini, ſive radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione nequeunt ſumi minores.

26. Cum tres numeri proportionales fuerint; primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad ſecundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; primus ad quartum, triplicatam habere rationem dicitur ejus quam habet ad ſecundum: & ſemper deinceps uno amplius, quam diu proportio extiterit. *In 10. def. V. dicebantur eadem de magnitudinibus.*

27. Quot-

27. Quotlibet numeris ordine positis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio. *Eadem in def. 5. VI fuerunt declarata. Ex V. verò etiam libro possunt peti argumentorum formæ; quæ etiam hoc VII in numeris demonstrantur.*

POSTULATA.

I.

Postuletur, cuilibet numero posse quotlibet sumi æquales vel multiplices.

II.

Quolibet numero posse sumi majorem; *Quia additione unitatis numerus in infinitum augeri potest.*

AXIOMATA.

I.

Qui numeri æqualium numerorum, vel ejuſdem æquè multiplices ſunt, inter ſe ſunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æquè multiplex eſt, vel æquè multiplices ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt.

III.

Qui numeri æqualium numerorum vel ejuſdem eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

IV.

Quorum idem numerus, vel æquales, eadem pars vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

V.

Unitas omnem numerum per unitates, quæ in ipſo ſunt; hoc eſt, per ipſummet numerum metitur. *Quia unitas toties ſumta, quot in ipſo ſunt unitates, ipſum numerum conſtituit.*

Omnis

VI

Omnis numerus ſeipſum metitur per unitatem. *Semel enim ſumtus numerus quilibet, ſibi ipſi eſt æqualis.*

VII.

Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

IIX.

Si numerus numerum metiatur, & ille per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente ſunt, unitates, hoc eſt, per ipſum numerum metientem. *Vt quia 3 metitur 12 per 4 metietur etiam eundem 12 4 per 3.*

IX.

Si numerus numerum metiens, multiplicet eum per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet. *Vt 3 metiens 12*

per 4, multiplicatus per 4 producit 12 quem metitur.

X.

Numerus quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur. *Vt quia 3 metitur 6 & 9: Ideoq; & metitur 15 ex 6 & 9 compositum.*

XI.

Numerus quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur. *Vt quia 3 metitur 6 qui metitur 12: Ideoq; etiam 3 metitur 12.*

XII.

Numerus metiens totum & ablatum, metitur etiam reliquum. *Vt quia 3 metitur & 15 totum & 9 ablatum, ergò etiam metitur reliquum 6.*

PROPOS: I.

Theorema 1.

Si duobus numeris *ab*, *cd* inæqualibus propositis, detrahatur semper minor *cd* de majore *ab* alterna quadam detractione *cd ex ab*, *eb ex cd*; *fd ex eb*, neque reliquus *eb* unquam metiatur præcedentem *cd*, quoad assumta sit unitas *gb*; qui principio propositi sunt numeri, *ab* & *cd* primi inter se erunt.

A. . . . . E . . G . B
C . . . F . . D
H - - - -

Sin minus, metietur eos numerus, ceu communis mensura ut h. *Cum itaq;* h α *metiatur* ab & cd; c d *verò metiatur* ae, *etiam* h & β ae & eb γ *reliquum metietur. Cumque* e b α *metiatur* c f, *etiam* b γ *metitur* c f & *ipsius* γ *reliquum* fd. *Cum denique* f d α *metiatur* eg *etiam* h *metietur* β e g & *ipsius reliquum* γ g b *unitatem numerus ceu totum suam partem.*

α ex hypot.
β. 11.ax.
γ 12.ax.

Quod absurdum. Sunt ergò inter se primi, Quod erat propositum.

PROPOS: II.

Problema I.

Duobus numeris *ab, cd* datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram *f d* invenire.

A.................. E.......B
C.......E...D
G----

α ex hypot.
β 11.ax.
γ 10.ax.

Detrahatur minor cd *ex majore* ab *& residuum* eb *ex minore* cd *& ita alternatium procedendo propos. dum perveniatur ad numerum* fd, *qui præcedentem* eb *metiatur. Erit* f d *communis mensura maxima. Cum enim* f d α *metiatur* eb, *&* eb *ipsum* cf, *etiã* fd *metietur* β cf; *Cumq; & seipsum etiam totum* c d γ *metitur. Metitur autem* cd *ipsum* ae, *ergò &* fd *eundem* a e, *& cum etiam* eb *metiatur, totum quoq;* a b, *& ita utramq;* ab, cd *metietur.*

Quod si quis etiam maximam hanc communem mensuram esse neget, esto g *major quàm* f d. *Cùm ergò* g *metiatur &* a b *&* c d; c d *verò ipsum*

ipsum ae; *itaq;* & eb *residuum* : & *cum* eb *metiatur* cf, *etiam* g *metietur* cf & *residuum* fd, *major minorem, quod absurdum.*

Hinc patet Corollarium. Quod numerus metiens duos numeros etiam communem eorum maximam mensuram metiatur. Si enim totum & ablatum metiatur, metitur etiam reliquum, quod communis est mensura maxima.

PROPOS: III.

Problema 2.

Tribus numeris *a b c*, datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram *d e* reperire.

A+++++++++++++++.
B++++++++++++D++++
C++++++E++F++++

Si d *a inventa communis mensura* a & b *etiam metiatur* c *erit maxima communis mensura inventa. Si enim major quædam sit quàm* d, *eadem cum metiatur* a, b, c *β etiam communem mensuram* d *metitur, major minorem Quod absurdum. Quod si* d *non metiatur* c *erunt inter se compositi. Proinde cum eadem mensura* α 2. VII. β ax. 2. VII

communis quæ a, b, c *metitur, etiam* β *metiatur* d
β cor. 2. VII *maximam mensuram* a & b, α *erit* e *mensura*
α 2. VII. *communis ipsius* d & c, *etiam communis maxima mensura numerorum* a, b, c. *Quia enim* e *metitur* c & d, d *verò* a & b, α *metietur etiam* e *ipsos* a & b. *Cæterum quod maxima communis mensura sit* e *patet, si aliam* f *esse velimus: Tum enim* f *metiens* a & b, β *metiretur etiam* d *eorum communem mensurã: & cum metiatur* d & c, *etiam horum communem mensuram* e *metiretur. Non igitur esset hæc major. Atq; ita* e *est communis mensura maxima trium numerorum* a, b, c. *Quod erat faciendum.*

Vnde nascitur Corollarium, quod numerus metiens tres numeros, communem etiam illorum mensuram metiatur.

PROPOS: IV.

Theorema 2.

Omnis numerus omnis numeri minor *a*, majoris *b*, aut pars est, aut partes.

A·······

B··········

A·····

B··········

Si

A..........
B......
C...

Si a & b sint inter se primi, minoris a unitates erunt partes majoris b. Si sint compositi, & a metiatur b, α erit ipsius pars. Si a non metiatur b, sed c, β sit communis eorum mensura quoties numerum c continet b, tot partes continere dicitur b numeri a. Sic patet propositum. α 3.def.VII β 2.VII.

PROPOSITIO V.

Theorema 3.

Si numerus *a* numeri *b c* pars fuerit, & alter *d* alterius *e f* eadem pars: & simul uterque *a* & *d*, utriusque *bc* & *e f* simul eadem pars erit, quæ unus *a* unius *b c*.

A...... D....
B......G......C E....H....F

Quia enim eadem pars est a *ipsius* bc, *quæ* d *ipsius* ef, *cõtinebit* bc *tot* a, *i.e.* bg *&* gc, *quot* d *i.e.* eh, hf *cõtinet* ef. *Itaq; quot numeri* a *sunt in* bc *totidem numeri* a *&* d *simul sunt in* bc *&* ef *simul.*

PROPOS: VI.

Theorema 4.

Si numerus *a b* numeri *c* partes fuerit,

rit, & alter *de* alterius *f* eædem partes: & simul uterque utriusque *ab &* *de*, *c* & *f* simul eædem partes erit, quæ unus unius *ab ipsius c*.

A . . . G . . . B | D . . . H . . . . E
C . . . . | F . . . .

Cum æquales numero partes habeant ab *&* d e, *quæ pars est* a g *ipsius* c *&* g h *ipsius* f, *eadem* *a*
a 5. VI. *erunt* a g *&* d h *ipsorum* c *&* f. *Similiter prioribus æquales* g b *&* h e. *Itaq; uterq;* ab *&* de *ipsorum* c f *eædem partes erit, quæ unus* a b *unius* c. *Quod erat ostendendum.*

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Si numerus *ab* numeri *cd* pars fuerit, qualis ablatus *ae* ablati *cf*: etiam reliquus *eb* reliqui *fd* eadem pars erit, qualis totus *ab* totius *cd*.

A . . . . E . . B
G . . . . C . . . . F . . . . D

Si ponatur eb *numeri* gc *eadem pars, quæ est* ae

est ae *ipsius* cf *vel* ab *ipsius* cd α *erit uterq;* ae, eb *simul eadem pars utriusq;* gc & cf, *id est, quæ totius* ab *totius* cd. *Cum ergo* ab *sit eadem pars utriusq;* gf & cd, *erunt numeri æquales, à quibus ablato communi* cf, *relinquuntur* gc & fd *æquales. Itaq; eadem pars est* eb *ipsius* fd, *quæ* ab *ipsius* cd. *Quod erat propositum.* α 5.VII.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 6.

Si numerus *ab* numeri *cd* partes fuerit, quales ablatus *ae* ablati *cf*: & reliquus *eb* reliqui *fd* eædem partes erit, quales totus *ab* totius *cd*.

A........E......B
G........C.............F........D

Assumto gc, *cujus eædem partes sit* eb, *ac* ae *ipsius* cf, α *erit uterq;* ae, eb *simul utriusq;* cf & gc *eædem partes, quæ* ae *ipsius* cf *vel* ab *ipsius* cd, *ideoq;* & ab *utriusq;* cd & gf *eædem partes erit*, & fg, cd *erunt æquales; communiq; adempto* cf, gc & fd *æquales erunt. Quapropter* eb *etiam ipsius* fd *erit eædem partes quæ totus* ab *totius* cd. *Quod erat propositum.* α 7.VII.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Si numerus *a* numeri *bc* pars fuerit, & alter *d* alterius *ef*, eadem pars: & viciſsim, quæ pars eſt, aut partes primus *a* tertij *d*, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus *b c* quarti *ef*.

A . . . .
B . . . . G C
D . . . . . .
E . . . . . . H . . . . . . F

Diviſis bc *&* ef *in partes* b g, g c, *&* eh, hf *æquales ipſis* a *&* d, *erit multitudo partium numerorum* bc *&* ef *æqualis. Cumq́; æquales inter ſe* bg, g c, *ſint minores ipſis* eh, h f *inter ſe æqualibus, quia totus* bc *ponitur minor toto* e f: *erit* b g *ipſius* eh *eadem pars aut partes, quæ* gc *ipſius* hf.*a* *Itaq; uterq;* bg, gc *ſimul, id eſt,* bc *ſecundus*
a 5. v. 6. VII *utriusq;* eh, hf *ſimul, id eſt,* ef *quarti eadem pars vel partes erit, quæ* bg *ipſius* eh, *id eſt, quæ* a *primi ipſius* d *tertij. Quod erat propoſitum.*

PRO-

PROPOSITIO X.

Theorema 8.

Si numerus *a b* numeri *c* partes fuerit, & alter *d e* alterius *f* eædem partes: & viciſſim, quæ partes eſt primus *ab*, tertij *e*, aut pars; eædem partes erit & ſecundus *c*, quarti *f*; aut pars.

A . . G . . B

C . . . . . .

D . . . . . H . . . . . E

F . . . .

Diviſis ab *&* d e *in partes* ag, gb *&* d h, he *numerorum* c *&* f: *erit multitudo partium* ab *&* de *æqualis & tam* ag *quàm* gb *eadem pars numeri*, c, *quæ tàm* dh *quàm* he *numeri* f. *Itaq;* α *viciſſim eadem pars vel partes, erit* ag *ipſius* dh *&* gb *ipſius* he, *quæ* c *ipſius* f *eſt: ac propterea eadem pars vel partes erit* ag *ipſius* d h, *quæ* gb *ipſius* he, β *adeoq; uterq;* ag, gb *ſimul, utriusq;* dh, he *ſimul eadem pars vel partes erit, quæ* ag *ipſius* dh, *id eſt, quæ* c *ipſius* f. *Quod erat demonſtrandum.* α 9. VII. β 5. v. 6. VII.

PROPOS: XI.

Theorema 9.

Si fuerit ut totus *a b* ad totum *c d*

ita

ita ablatus *ae* ad ablatum *cf*: Et reliquus *eb* ad reliquum *fd* erit, ut totus *ab* ad totum *cd*.

A . . . . E . . . . . B

C . . . . . F . . . D

Quia enim proportionales sunt ab *ad* c d *ut*
a 20. def. VII. ae *ad* cf, α *erit primus* a b *secundi* cd, *ut tertius* ae *quarti* cf, *vel æquè multiplex vel eadem pars, aut partes, vel continet æqualiter cũ aliqua parte vel partibus. Cum ergò* cf *eadem pars sit* ae,
β 7. v. 8. VII *quæ* cd *ipsius* ab, β *igitur & reliquus* fd *reliqui* eb *eadem pars erit, quæ totus* cd *totius* ab. *Erit q; ut totus* ab, *ad totum* cd; *ita reliquus* eb *ad reliquum* f d.

PROPOSITIO XII.

Theorema 10.

Si sint quotcunque numeri proportionales *ut a ad b, ita c ad d & e ad f*, erit quemadmodum unus *a* antecedentium, ad unum consequentium *b*; ita omnes antecedentes *a c e* ad omnes consequentes *b d f*.

Quia

A.+.+.+.C.+.+.E.+.+.+
B.+.+.+.+.+.+.+.D.+.+.+.F.+.+.+.+.+.+

Quia enim α *vel multiplex est vel eadem pars vel partes* a *ipsius* b *quæ* c *ipsius* d *&* e *ipsius* f; β *erit &* ac *simul utriusq;* bd *simul æquè multiplex, eadem pars vel partes, quæ* a *ipsius* b *vel* e, *ipsius* f, *Sic &* ac *tanquam unus &* e *simul, amborum* bd *tanquam unius &* f *simul æquè multiplices erunt vel eadem pars aut partes, quæ* a *ipsius* b. *Itaq; & omnium* a c e *simul eadem est proportio ad omnes* c, d, f *simul, quæ* a *ad* b. *Quod erat propositum.* α 20. def. VII. β 5. v. 6. VII

PROPOSITIO XIII.

Theorema 11.

Si quatuor numeri proportionales sint: *ut a ad b, ita c ad d,* & vicissim proportionales erunt, *ut a ad b, ita b ad d.*

A.+.+.+.C.+.+.+.+.+.+
B.+.+.+.+.D.+.+.+.+.+.+.+.+

Propter eandem proportionem a *ipsius* b *&* c *ipsius* d *eadem pars aut partes vel æquèmultiplex* α *est.* β *Itaq; vicißim* a *ipsius* c *&* b *ipsius* α 20. def. VI β 9. v. 10 VII.

d *vel eadem pars aut partes vel æquè multiplex erit,* α *atq; ideò ut* a *ad* c *in* b *ad* d. *Quod erat propositum.*

PROPOSITIO XIV.

Theorema 12.

Si sint quotcunque numeri *a b c*, & alij *def* illis æquales multitudine, qui bini sumantur & in eadem ratione *ut a ad b, ita d ad e & ut b ad c, ita e ad f*: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt *ut a ad c ita d ad f.*

A + + + + + + + + + + + + D + + + + + + + + + +
B + + + + + + + + E + + + + + + +
C + + + + F + + +

Quia enim est, ut a *ad* b, *ita* d *ad* e; *etiam* α
α 13. VII. *vicißim erit ut* a *ad* d, *ita* b *ad* e, *& ob* β *ratio-*
β ex hypot. *nem eandem* b *ad* e, *ut* c *ad* f. *Itaq; ut* a *ad* d, *ita* c *ad* f, *&* α *vicißim ut* a *ad* c, *ita* d *ad* f. *Quod erat propositum.*

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si

Si unicas *a* numerum *b c* quempiam metiatur, æquè autem alter *d* numerus alterum *e f* quendam numerum metiatur : & viciſſim æquè unitas *a*, tertium numerum *d* metietur, & ſecundus *bc* quartum *ef*.

A. D..
B.G.H.C E..I..K..F

Diviſo bc *in unitates* bg, gh, hc, *&* e f *in partes* e i, ik, hf, *ipſi* d *æquales ; æqualis ſit multitudo unitatum numeri* bc, *multitudini partium numeri* ef, *&* a *unitas æque metitur numerum* d, *ac* bg *ipſum* ei; gh, *ipſum* i k *&* h c *ipſum* k f. *Ideoq;* *unitas* a *α erit eadem pars numeri* d, *quæ totus* bc, *totius* e f; *ac proinde* a *numerum* d *&* bc *numerum* e f *æquè metitur. Quod erat oſtendendum.* α 5. VII.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 14.

Si duo numeri *a*, *&* *b* ſeſe mutuò multiplicantes fecerint *d* & *c* aliquos; geniti *d* & *c* ex ipſis æquales inter ſe erunt.

E.

A . . . . B . . . .

C . . . . D . . . .

Sumta unitate e, *cum* a *multiplicans* b *faciat* c, α *erit* c *ex* b *toties compositus, quot in* a *sunt unitates, & unitas* e *numerum* a, & b *numerum* c
α 15 def. VII *æquè metitur; Ergo* β *vicißim unitas* e *nume-*
β 15. VII. *rum* b, & a *numerum* c *æquè metitur. Rursus quia* b *multiplicans* a *facit* d, α *erit* d *ex* a *toties compositus, quot in* b *sunt unitates, & e æquè metietur* b *ac* a *ipsum* d. *Ideoq;* β *vicißim* e *numerum* a, & b *numerum* d *æquè metitur.* a *igitur metitur æquè &* d & c, *qui proinde sunt inter se æquales. Quod erat propositum.*

PROPOS: XVII.

Theorema 15.

Si numerus *a* duos numeros *b* & *c* multiplicans fecerit aliquos *d* & *e*; geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, *ut b ad c, ita d ad e* quam multiplicati.

Assu-

F.
A...
B.. C....
D...... E............

Assumta unitate f, *erit* d *ex* b *compositus toties, quoties unitas* f *est in* a: *similiterq́ toties* e *compositus ex* c, *quoties unitas eadem est in eadem* a. *Itaq́* b *ipsum* d *&* c *ipsum* e *æquè metitur. Quare* b *ipsius* d *&* c *ipsius* e *eadem pars est*, *& α fit, ut* b *ad* d, *ita* c *ad* e, *& β permutando, ut* b *ad* c, *ita* d *ad* e. *Quod erat ostendendum.* α 20.def. VII. β 13.VII.

PROPOSITIO XIIX.

Theorema 16.

Si duo numeri *a* & *b* quempiam numerum *c* multiplicantes, fecerint aliquis *d* & *e*: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, *ut a ad b, ita d ad e*, quam multiplicantes.

A..... B.....
C...
D............ E................

Cum enim ex a *in* c *fiat* d, *idem α fiat ex* α 16.VII.

c *in* a. *Eodem modo cum ex* b *in* c *fiat* e, *idem* α *fiat*
β 17. VII. e *x* c *in* b. *Quoniam igitur idem* c *multiplicans ipsos* a *&* b *facit* d *&* e, β *erit ut* a *ad* b *ita* d *ad* e.

PROPOS: XIX.

Theorema 17.

Si quatuor *a, b, c, d* numeri proportionales fuerint *ut a ad b, ita c ad d*, qui ex primo *a* & quarto *d* fit numerus *e*, æqualis erit ei, qui, ex secundo *b* & tertio *c* fit numero *f*. Et si qui ex primo *a* & quarto fit, numerus *e* æqualis fuerit ei, qui ex secundo *b* & tertio *c* fit numero *f*; ipsi 4 numeri proportionales erunt *ut a ad b, ita c ad d*.

A...

B..

C......

D....

E............

F............

G..................

α. 17. VII. *Fiat* g *ex* a *in* c. *Quia idem* a *multiplicans* d *&* c *fecit* e *&* g, α *erit* c *ad* d, *ut* g *ad* e. *Erat autem*

tem a *ad* b, *ut* c *ad* d: *Est igitur & a ad* b *ut* g *ad* e. *Rursus, quia* a *&* b *multiplicantes idem* c *faciunt* f *&* g, β *erit ut* a *ad* b, *ita* g *ad* f. *Erat etiam* g *ad* e, *ut* a *ad* b. *Ergò* e *&* f *sunt* γ *æquales*. β 18. VII. γ 9. V.

Sint jam æquales e *&* f, *Erunt 4 illi numeri proportionales. Quia enim* a *multiplicans* c *&* d *facit* g *&* e α *erit, ut* c *ad* d, *ita* g *ad* e *vel* f *ipsi æqualem.. Rursus cum* a *&* b *multiplicantes* c *faciant* g *&* f, β *erit* a *ad* b, *ut* g *ad* f. *Quare ad eandem proportionem* g *&* f *eædem* a *&* b; c *&* d *erunt eædem. Quod erat ostendendum.*

PROPOS: XX.

Theorema 18.

Si tres numeri *a*, *b*, *c*, proportionales fuerint, *ut a ad b, ita b ad c*, qui ſub extremis *a* & *c* continetur; æqualis eſt ei, qui à medio *b* efficitur: Et ſi qui ſub extremis *a* & *c*, continetur æqualis fuerit ei, qui à medio *b* deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt *a ut ad b, ita b ad c.*

A . . . .
B . . . . . . D . . . . . .
C . . . .

Sumto d *æquali* b, *erit ut* b *ad* c, *hoc est, ut* a *ad* b; *ita* d *ad* c, a *eritq; numerus ex* a *in* c *æ-*
a 19. VII. *qualis numero ex* b *in* d, *hoc est ex* b *in seipsum.*

Sit jam etiam productus ex b *in seipsum æqualis producto ex* a *in* c, *erunt tres numeri proportionales. Rursum enim assumto* d *æquali ipsi* b *erit ut* b *ad* c *ita* d *ad* c. *Quia ergò numerus factus ex* a *primo in* c *quartum æqualis est facto ex* b *secundo in* d *tertiū,* a *erunt 4 numeri* a b d c *proportionales. Sed* b *est idem cum* d. *Quod erat propositum.*

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Minimi numeri *ab, cd* omnium *e* & *f* eandem cum eis rationem habentium, *ut a b ad cd, ita e ad f,* metiuntur æquè numeros, eandem cum eis rationem habentes, major *ab,* quidem majorem *e*, minor verò *cd* minorem *f*.

Cum

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . .
F . . . . . .

Cum enim sit a b *ad* c d, *ut* e *ad* f, *etiam* α *vicissim est* a b *ad* e, *ut* c d *ad* f; *& cum* a b, c d *sint minores ipsis* e *&* f, β *erit* a b *ipsius* e, *&* c d *ipsius* f *eadem pars vel partes. Sed partes esse non possunt. Divisis enim* a b *&* c d, *si fieri potest in partes* a g, g b *&* c h, h d *quæ multitudine erunt æquales, atque ideò* a g *ipsius* e, *&* c h *ipsius* f *eadem pars.* β *Erit ergò, ut* a g *ad* e; *ita* c h *ad* f, *&* α *vicissim ut* a g *ad* c h, *ita* e *ad* f, *vel* a b *ad* c d: *ac proinde numeri* a g, c h, *minores quàm* a b, c d *eandem quam* a b, c d *minimi illius proportionis, habebunt rationem. Quod absurdum.* α 13. VIII. β 20. def. VI

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si fuerint tres numeri, *a, b, c* & alij ipsis multitudine æquales, *d e f,* qui bini sumantur, & in eadem ratione; fuerit autem perturbata eorum proportio; *ut a ad b, ita e ad f, & ut b*

ad c, ita d ad e; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt *ut a ad c, ita d ad f.*

A............ D...
B... E........
C...... F..

α 19. VII. *Cum enim sit, ut* a *ad* b *ita* e *ad* f, α *erit numerus ex* a *in* f *genitus æqualis numero ex* b *in* e: *Ita ex* b *in* e *facto æqualis erit ex* c *in* d *procreatus, cum sit, ut* b *ad* c, *ita* d *ad* e; *adeoq; numerus ex* a *primo in* f *quartum productus numero ex* c *secundo in* d *tertium genito æqualis erit.* α *Quare ut* a *ad* c *ita* d *ad* f. *Quod ostendendum erat.*

PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Primi inter se numeri *a* & *b* minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

A........B....
C----- D---
E---

Sin minus, sint c, d *in eadem proportione ipsis*

ipsis a,b *minores minimi.* α *Metietur ergò* c *ipsum* a, & d *ipsum* b *æquè*; c *videlicet ipsum* a *per tot unitates per quot* d *metitur ipsum* b. *Quæ unitates sint in* e. *Cum ergò* c & d *metiantur* a & b *per* e *unitates*, β *metietur* e *ipsos* a & b *per unitates ipsorum* c & d. *Idem enim* e *per* c, *quod* c *per* e *efficit.* *Itaq;* a & b *contra hypothesin non erunt primi, sed compositi.* α 21. VII. β 15. VII.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Minimi *ab* numeri omnium eandem cum eis rationem habentiũ, primi inter se sunt.

A+ + + + + + + + B+ + + + +

C- - + -

D- - - - E- - -

Sin minus, esto communis ipsorum mensura c. *Itaq; quoties* e *est in* a & b *tot erunt unitates in* d & e, & c α *multiplicans* d & e *producit* a & b. *Proinde est* a *ad* b *ut* d *ad* e, *Adeoq; cum* d & e *partes ipsorum* a & b *minores sint*, a & b *non sunt minimi in eadem ratione.* *Quod est contra hypothesin.* α 9. ax. β. 18. VII.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Theorema 23.

Si duo numeri *a b* primi inter ſe fuerint; qui unum *a* eorum metitur numerus *c*, ad reliquum *b* primus erit.

A. . . . . B. . . . .
C. . . . D- - - -

Sin minus, eſto communis eorum menſura d *Quia ergò* d *metitur* c, *& ipſum* a, *etiam* d *a metitur* a. *Cumq; idem* d *metiatur etiam* b. *Non igitur* a *&* b *erunt inter ſe primi contra hypotheſin.*

a 11.ax.

PROPOS: XXVI.

Theorema 24.

Si duo numeri *a b* ad quempiam *c* primi fuerint; etiam ex illis genitus *d* ad eundem *c* primus erit.

A. . . . . . . B. . .
C. . . . .
D. . . . .
E- - - - F- - - -

Sin minus eſto communis ipſorum menſura e, *quæ*

quæ d *metiatur toties, quot in* f *sunt unitates. Itaq;* e *multiplicans* f *α producit* d. *Sic* d *est factus ex* a *in* b. *Ergò cum ex* e *primo in* f *quartum fiat idem numerus* d, *qui ex* a *secundo in* b *tertiã, β erit ut* e *ad* a, *ita* b *ad* f. *Cumq;* a *&* c *sint primi, &* e *ponatur metiri ipsum* c, *γ erit* e *ad* a *primus; adeoq;* e *&* a *tanquam primi in sua proportione δ erunt minimi. Proinde æquè ε metiẽtur* b *&* f *eandem proportionem habentes,* e *ipsum* b *&* a *ipsum* f; *Et* e *metiens* b *&* c *faciet illos cõtra hypothesin compositos.*

α 9. ax.
β 19. VII.
γ 25. VII.
δ 23. VII.
ε 21. VII.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Si duo numeri *a* & *b* primi inter se fuerint: Etiam ex uno *a* eorum genitus *c* ad reliquum *b* primus erit.

A. . . . B. . . . . . .
C. . . . .
D. . . .

Sumto d *ipsi* a *æquali, erit* d *ad* b *primus. Quia ergò* a *&* d *ad* b *sunt primi, α erit* c *genitus ex* a *in* d, *id est, ex* a *in seipsum ad eundem* b *primus. Similiter ex* b *in se genitus ostenditur primus ad* a.

α 20. VII.

PRO-

PROPOSITIO XXIIX.

Theorema 26.

Si duo numeri *a* & *b* ad duos numeros *c* & *d*, uterque ad utrumque primi fuerint, qui ex eis *e* & *f* gignentur, primi inter se erunt.

A.... B...

E................

C ....D..

F........

Ex a *in* b *fiat* e *& ex* c *in* d *fiat* f, *erunt* e *&* f, *inter se primi. Cum enim uterq;* a *&* b *ad* c
a 26. VII. *sit primus, genitus ex ipsis ad eundem* c *primus* a *erit; & ita etiam* e *ad* d *primus* a *erit. Quia ergò uterq;* c *&* d *ad* e *est primus, etiam* f *ex ipsis genitus ad* e *primus* a *erit.*

PROPOS: XXIX.

Theorema 27.

Si duo *a* & *b* numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque se ipsum fecerit aliquem; & geniti ex ipsis

ipsis *c* & *d* primi inter se erunt: Et si, qui in principio *a* & *b* genitos *c* & *d* ipsos multiplicātes, fecerint aliquos *e* & *f*; & hi quoque primi inter se erunt: & semper circa extremos hoc eveniet.

A + + +	B + +
C + + + + + + + + +	D + + + +
E +	F + + + + + + + +
G 81	H 16
I 243	K 32

Cum enim a, b *sint inter se primi*, [a] *erit* c *ex* a *in se factus ad reliquum* b *primus: Sic etiam* d *factus ex* b *in se erit ad* c *primus quia* b *&* c *sunt inter se primi, adeoq; duo facti* c d *inter se primi. Rursus, quia* b *&* a *inter se sunt primi, erit &* c *ex* a *in se factus, ad* b, *&* d *genitus ex* b *in se ad* a *primus: Est autem &* c *ad* d *primus. Vterq; igitur* a c *ad utrumq;* b d *primus* [b] *erit, &* e *factus ex* a *in* c *primus ad* f *factum ex* b *in* d. *Ita si ex* a *in* e *fiat* g, *& ex* b *in* f *fiat* h, [b] *erunt* g *&* h *primi. Item si ex* a *in* g *& ex* b *in* h *fiant* i *&* k, *erunt & ipsi primi; idemq; circa extremos semper eveniet.*

α 27 VII

β 27. VII.

PRO-

PROPOS: XXX.

Theorema 28.

Si duo numeri *ab*, *bc* primi inter se fuerint: Etiam uterque simul *ac* ad quemlibet illorum *ab* vel *bc* primus erit: & si uterque simul *ac* ad unum aliquem illorum *ab* primus fuerit; etiam qui in principio, *ab* & *bc*, numeri primi inter se erunt.

A . . . . B C

D . - - -

Si ac *ad* bc *non est primus, metiatur eos communis mensura* d. *Quia ergò* d *metitur* ac *totum &* ab *ablatum, etiam* α *metitur reliquum*
α12.ax. bc. *Ideoq;* ab, bc *contra hypothesin non sunt primi. Similiter si* ac *sit primus ad* ab, *dico etiam* ab, bc *esse primos inter se. Sin minus mensor communis* d *metiens* ab *&* bc, *etiam* ac *ex ipsis com-*
β10 ax. *positum* β *metietur. Ideoq; contra hypothesin* ac ab *primi non erunt.*

Hinc patet Corollarium: Si numerus metitur duos numeros, metitur etiam ex illis compositum.

Ve

Vt quia d *metitur* ab *&* b c *etiam metitur ex illis compositum* ac.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 29.

Omnis primus numerus *a* ad omnem numerum *b*, quem non metitur, primus est.

A . . . . . B . . . .
C - - -

Sin minus, esto communis mensor c. c *ergo metiens* a *&* b *non potest esse idem cum* a, *qui non metitur* b. *Proinde cum alius numerus* c *metiatur ipsum* a, *non potest esse primus contra hypothesin;*

PROPOS: XXXII.

Theorema 30.

Si duo numeri *a* & *b* sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem *c*: genitum *c* autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus *d*: is etiam unum eorum, *a* vel *b*, qui in principio metietur.

A.... B......
C..........................
D...E........

Si d non metiatur a, erunt d & a primi. Sint autem in e tot unitates, quoties d continetur in c. Itaq; d multiplicans e producit c ut & a
α 19. VII. multiplicans b, & est ut d ad a, ita b ad e. Cumq;
β 23. VII. d ad a sit primus, ut supra patet, β erunt d & a in
γ 21. VII. sua proportione minimi, & æquè γ metientur ipsos b & e. Proinde si d non metitur ipsum a, metitur ipsum b. Idem inferretur de a si d non metiretur b.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Omnem compositum numerum a aliquis numerus metitur.

D....................
B......C...

Si b metiens a esset primus, pateret propositum. Sed cum sit compositus, metitur ipsum c, qui vel primus, vel compositus est. Si primus, ipse
α 11. ax. metiens d α metitur etiam a. Sin compositus, alius ipsum metiens esset primus. Quia oportet

tan-

tandem venire ad numerum primum nisi infinitè diminui numeros posse statuerimus.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 22.

Omnis *a* numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

A . . . .

Cum enim omnis numerus sit vel primus; vel compositus: compositum autem omnem metiatur primus. Igitur omnis numerus primus est, aut eum primus metitur. *a* 33. VII.

PROPOS: XXXV.

Problema 3.

Numeris datis quotcunque *a*,*b*,*c*, reperire minimos omnium, eandem rationem habentium cum ipsis *sive sit a ad b, ut b ad c, sive non.*

A. . . . . . B. . . . C. . . . .

D. .

E. . . F. . G. . . .

H- - . . I - - - - K- - - -

L- - - - -

Si a,b,c *essent primi,* α *pateret propositum.*
α 21.VIII. *Si non primi,* β *inveniatur mensor eorum maximus*
β 3.VII. d,*qui ipsos* a,b,c,*metiatur per* e,f,g,*quos in ea-*
γ 1.5VII. *dem ratione minimos dico. Cum enim* e,f,g *multiplicantes eundem* d *producant* a,b,c, *eos in* γ *eadem ratione esse oportet. Si autem* e,f,g *negentur minimi,ipsis minores in eadem ratione sint* h,i,k,*qui ipsos* a,b,c α *æquè metientur per* l, *&* *vicissim* l *ipsos* a,b,c *per* h,i,k. *Ideoq;* l *multiplicans* h,i,k *producit* abc *&* l *metitur* abc *per* hik. *Cum ergò eundem* a *producant* e *primus multiplicans* d, *quartum &* h *secundus multiplicans* l *tertium,* δ *erit ut* e *primus, ad* h *secun-*
δ 19.VII. *dum; ita* l *tertius,ad* d *quartum. Sed* e *major est quàm h, igitur &* l *major est quàm* d: *adeoq;* l *metiente ipsos* a,b,c,*non erit* d *communis maxima mensura contra hypothesin.*

Hinc patet maximam mensuram quotlibet numerorum metiri ipsos per numeros in eadem proportione minimos.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema 4.

Duobus numeris *a* & *b* datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum *c*.

Si a

A....B.....

C.....................

D................

E-----F----

Si a *&* b *dati sunt primi, ex ipsorum inter se multiplicatione factus* c *est minimus omnium, quæ* a *&* b *metiuntur. Cum enim* c *factus sit ex* a *in* b, *patet, quod* a *ipsum* c *per* b, *&* b *ipsum* c *per* a α *metiantur. Si quis autem* c *neget etiam minimum, metiantur* a *&* b *alium* d *minorem ipso* c, *per* e *&* f. *Cum ergò idem* d *fiat ex* a *primo in* e *quartū, & ex* b *secundo in* f *tertium,* β *erit ut* a *ad* b, *ita* f *ad* e; *adeoq;* a *&* b *tanquam* γ *primi* k *in sua proportione minimi æquè* δ *metientur ipsos* f *&* e. *Quoniam verò & multiplicans* b *&* e *facit* c *&* d, ε *erit* c *ad* d, *ut* b *ad* e: *ac propterea cum* b *metiatur ipsum* e, *metietur &* c *ipsum* d, *major minorem. Quod absurdum.*

α 7. ax.
β 19. VII.
γ 23. VII.
δ 21. VII.
ε 17. VII.

A.... B.......

C..D...

E.............

F-----------

G----H.---

Deinde dati numeri a *&* b *non sint primi:* ζ *inveniantur* c, d *in eadem proportione mini-* ζ 35. VII.

mi, & erunt 4 numeri proportionales, ex quorum primo a *& quarto* d *fiet idem* e *qui ex* b *secundo in* c *tertium; eritq; factus* e *minimus quem* a *&* b *metiuntur. Cum enim* e *ex* a *in* d, *& ex* b *in* c *sit factus, utrumq;* a *&* b *ipsum* e *metiri constat. Si quis minimum eum esse negaverit, esto* f *minor ipso* e, *quem metiantur* a *&* b *per* g *&* h. *Cum ergò idem* f *fiat ex* a *primo in* g *quartũ, &* b *secundo in* h *tertium, erit ut* a *ad* b *ita* h *ad* g, *adeoq;* c *&* d *minimi in proportione* a *ad* b, *vel* h *ad* g, *metientur ipsos* h *&* g *æquè. Quoniam verò* a *multiplicans* d *&* g *facit* e *&* f, *erit* e *ad* f, *ut* d *ad* g; *ac propterea cum* d *ipsum* g *metiatur, metietur &* e *ipsum* f, *major minorem. Quod absurdum.*

Hinc patet Corollarium. Si duo numeri *a b* multiplicent minimos *c d* eandem rationem habentes, major *b* minorem *c*, & minor *a* majorem *d* producitur minimus *e*, quem illi metiuntur.

PROPOS: XXXVII.

Theorema 33.

Si duo numeri *a b* numerum quempiam *cd* metiantur: Etiam mini-

nimus *e* quem illi metiuntur *a.b*, eundem *c d* metietur.

A ++ B +++

C++++++++++++++++++++F----D

E++++++

Sin minus, auferatur e *ex* cd *quoties potest.* & *relinquatur* fd *minor ipso* e. *Cum itaq; tam* a *quàm* b *metiatur ipsum* e, & e *ipsum* c f, α *metietur etiam tum* a *tum* b *ipsum* cf: *adeoq;* a & b *metientes* & cd *totum* & cf *ablatum, etiam* β *metientur reliquum* f d. *Sed* f d *est minor, quàm* e. *Non igitur* e *est minimus quem* a & b *metiuntur, contra hypothesin.* α 11. ax. β 12. ax.

PROPOSITIO XXXIIX.

Problema 5.

Tribus numeris *abc* datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum *d*.

A +++ B ++++ C ++++++

D ++++++++++++

E - - - - - - - - - - -

α *Invento* d *minimo quem* a & b *metiantur, eundem etiam vel metietur* c *vel non. Si metiatur, factum est quod jubebatur. Siq;* d *non sit minimus, minor ipso fiat* e, *quem* abc *metiantur.* α 36. VII.

β37.VII. *Quoniam igitur* a *&* b *metiuntur* e, *&* d *est minimus, quem* a *&* b *metiuntur,* β *metietur quoq;* d *ipsum* e *major minorem. Quod est absurdum.*

A . . B . . . C . . . .
D . . . . . .
E . . . .
F - - - - - - -

Deinde, si C *non metiatur ipsum* d, α *invento* e *minimo, quem* c *&* d *metiantur, erit* e *numerus minimus, quem* a, b, c *metiuntur. Cum enim* a *&* b *metiantur ipsum* d, *&* d *ipsum* e, *etiam* a *&* b *ipsum* e γ *metientur, metitur autem*
γ 11.VII. *&* c *eundem* e. *Ergò omnes* a, b, c *ipsum* e *metiuntur.*

Si c *non esset minimus, minor ipso sit* f *quem* a, b, c *metiantur. Quia igitur* a *&* b *ipsum* f *metiuntur,* δ *metietur etiam eundem* f *numerus* d, *adeoq; cum* c *&* d *metiantur ipsum* f *minorem, quàm* c, *non erit* e *minimus, quem* c *&* d *metiuntur. Quod est contra hypothesin.*

Hinc nascitur Corollarium: Si tres *a*, *b*, *c*, numeri numerum quempiam *f* metiantur, etiam minimum *e*, quē illi metiuntur, eundem *f* metiri.

In ultima enim parte demonstrationis ostensum

sum est ex eo, quod a, b, c *ponebantur metiri ipsum* f; *etiam* e *minimum, quem* a, b, c *metiuntur, eundem* f *metiri.*

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 34.

Si numerum *a* numerus *b* quispiam metiatur; ille *a*, quem metitur, partem habebit à dimetiente *b* denominatam.

A+++++++++++•
B++++C+++

Quoties b *metitur* a, *tot sint in* c *unitates.* α 15. VI.
Quia ergò b *ipsum* a *metitur per unitates ipsius* c, β 13 def. VII
idem c α *metietur* a *per unitates* b. *Itaq; unitas toties metitur* b, *quoties* c *ipsum* a. *Sed unitas* β *metitur* b *per partem à* b *denominatam; Ergò &* c *metitur* a *per partem à metiente* b *denominatam. Quod erat propositum.*

PROPOSITIO XL.

Theorema 35.

Si numerus *a* partem *b* habuerit

quamlibet; metietur illum *a* nume-
rus *c* à parte *b* denominatus.

A + + + + + + + + + + + +

B + + + C + + + +

Cum enim pars b *denominetur à* c; *sit autem & unitas pars ipsius* c, *ab eodem* c *denominata; metietur unitas ipsum* c *&* b *ipsum* a *æquè.*
α 15. VII. *Viciſsim ergò & unitas ipsum* b, *&* c *ipsum* a α *metietur.*

PROPOSITIO XLI.

Problema 9.

Numerum *g* reperire, qui minimus cum ſit, habeat partes datas *abc*.

D + + A ſecunda

E + + + B tertia.

F + + + C quarta

G + + + + + + + + + + + +

H - - - - - - - - -

Numeri à partibus a, b, c *denominati ſint* d,
α 38. VII. e, f, *qui minimum ſuum* g α *metiantur. Erit hic mi-*
β 39. VII. *nimus partes datas continens. Partes quidem ha-*
γ 40. VII. *bet: Cum enim* d, e, f *ipſum* g *metiantur,* β *habebit* g *partes à* d, e, f *denominatas, hoc eſt,* a, b, c, *quæ à* d, e, f *denominātur. Si autem minimus non ſit, eſt* h *minor habens eaſdem partes* a, b, c. *Has*

ergò

ergò cum habeat, v metientur ipsum d, e, f *numeri, à partibus illis denominati: adeoq; cum* h *sit minor, non erit* g *minimus quem* d, e, f *metientur. contra hypothesin.*



EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER IIX.

PROPOS: I.

Theorema 1.

SI fuerint quotcunque numeri *a, b, c, d*, deinceps proportionales, extremi verò *a* & *d* ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium, eandem cum eis ratione habentiũ.

Sin

A. . . . . C. . . .
B. . . . . F- - - -
C. . . . . G. - - - -
D. . . . . H- - - - -

Sin minus, sint in eadem ratione minores efgh. *Quod ergò ipsis* a,b,c, d *bini & in eadem ratione sumti sunt alij* e, f, g, h *multitudine æ-*
α 14. VII. *quales, ex æquali* α *erit, ut* a *ad* d, *ita* e *ad* h. *Sed*
β 23. VII. a *&* d *sunt in sua ratione* β *minimi quia primi.*
γ 21. VII. *Ergò tam* a *ipsum* e, *quàm* d *ipsum* h γ *æquè metietur, major minorem. Quod absurdum.*

PROPOS: II.

Problema I.

Numeros *c d e* reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque jusserit quispiam in data ratione *a ad b.*

			K, 16.
		F, 8.	L, 24.
A, 2.	C, 4.	G 12.	M, 36.
B, 3.	D, 6.	H, 18.	N, 54.
	E, 9.	I, 27.	O, 81.

Tres

Tres ita inveniuntur. a *multiplicans seipsum&* b;*producit* c *&* d; b *in se tertium* f. *Quia ergò ex* a *in* a *&* b *facti sunt* c*&* d *:α ergò est, ut* a *ad* b,*ita* c *ad* d. *Ita cum* d *&* e *sint ex* b *in* a *&* b,*erit,ut* a *ad* b,*ita* d *ad* e. *Sunt itaq; continuè proportionales in ratione* a *ad* b, *Sed minimi etiā sunt in ratione eadem. Quia enim extremi* c *&* e *facti sunt ex β primis* a *&* b *in seipsos etiam* c,e *γ erunt inter se primi & in eadem ratione minimi. Iam ex* a *in inventos* c, d,e *fiant* f, g,h *& ex* b *in ultimum* e *fiat* i. *Erunt quatuor* f,g,h,i *in ratione data minimi. Quia enim* f, g,h *ex* a *in* c,d,e *sunt facti, ε retinent eandem rationem; & quia* a *&* b *multiplicantes* e *fecerunt* h *&* i,*erunt etiam* h i *in ratione* a *ad* b. *Sunt verò etiā minimi ex modò data ratione.Non aliter ex* a *in* f,g,h,i *fiunt* k,l,m, n;*& ex* b *in* l *ultimum* o, *ut sint quinq; continuè proportionales in ratione* a,b *proposita. Et consequenter quotcunq; sex,7, 8 vel 9. &c. continuè proportionales in ratione proposita possunt inveniri. Hinc sequuntur Corollaria.*

α 17.VII.
β 24.VII.
γ 29.VII.
δ 1.IIX.
ε 18. VII.

Corollarium 1.

Si tres minimi numeri sint continuè proportionales, extremi erunt quadrati: Si autem quatuor fuerint, cubi. Quia extremi illi trium fiunt

ex

ex ductu *a* & *b* in se: Extremi verò ipsorum quatuor fiunt ex ductu radicum *a* & *b* in quadratos *e* & *f*. Quare *f* & *i* necessum est esse cubos.

Corollarium 2.

Extremi numeri quotcunque proportionalium, ex hujus proportionis sensu inventorum in data ratione mininorum, inter se sunt primi. Hoc patet ex multiplicatione, qua numeri proportionales producuntur ex 29. VII.

Corollarium 3.

Duo numeri minimi in data ratione metiũtur omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione. Producuntur enim ex illorum multiplicatione in alios numeros.

PROPOSITIO III.

Theorema 2.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales *a*,*b*,*c*,*d*, minimi omnium eandem cum eis rationem

habentium; illorum extremi *a*, *d* sunt inter se primi.

A, 8.			K. 8.
B, 12.	E, 2.	G, 4.	L, 12.
C, 18.	F, 3.	H, 6.	M, 18.
D, 27.		I, 9.	N, 27.

Inventis duobus in data ratione a *ad* b *vel* b *ad* c, *vel* c *ad* d, *minimis* e, f, *& in eadem ratione* e *ad* f *α tribus minimis* g, h, i, *& quatuor ejusdem rationis* k, l, m, n, *& ita si opus foret, etiam quinq; vel sex, donec respondeant multitudine initiò propositis numeris* a, b, c, d. *Quoniam ergò &* a, b, c, d, *&* k, l, m, n *sunt minimi in data ratione, oportet ut singuli singulis sunt æquales,* a *ipsi* k *&* d *ipsi* n. *Cumq;* k *&* n *β sint inter se primi, etiam* a d *inter se primi erunt.* α 2, IIX. β 2. cor. 2. IIX.

PROPOS: IV.

Problema 2.

Rationibus datis quotcunque *a ad b, c ad d* in minimis numeris, reperire numeros *f, e, g* deinceps minimos in datis rationibus.

A,6. B,5. C,4. D,3.
G,4. F,24. E,20. G,15.
I - - - K - - - . L - - - .

Pro tribus α *inveniatur* e *minimus, quem*
α 36. VII. b *secundus & c tertius metiantur: & quoties* b *metitur* e, *toties* a *ipsum* f, *& quoties* c *eundem* e, *toties* d *metiatur* g. *Erunt* f, e, g *continuè proportionales in rationibus datis. Quia enim* a *&* b *ipsos* f *&* e *æquè metiuntur, per eundem* h, *etiam* a *&* b *multiplicantes* h *producunt* f *&* e; *&* β *est, ut* a *ad* b, *ita* f *ad* e. *Ita cum* c *&* d *æquè me-*
β 18. VII. *tiantur ipsos* e *&* g, β *erit etiã, ut* c *ad* d, *ita* e *ad* g; *adeoq;* f, e, g *in rationibus* a *ad* b *&* c *ad* d *sunt continuè proportionales.*

Quod si ijdem negentur esse minimi, mino-
γ 21. VII. *res sint* i, k, l. *Quia ergò* a *&* b *sunt minimi, in sua ratione,* γ *æquè metientur ipsos* i *&* k, *in eadem ratione constitutos consequens* b *ipsum* k, *consequentẽ: Sic etiam* c *&* d *ipsos* k *&* l, *antecedens* c *antecedentem* k. *Itaq; cum* b *&* c *metiantur ipsum* k, *minimus* e *quem* b *&* c *metiun-*
δ 37. VII. *tur, eundem* k, *major minorem* δ *metietur. Quod absurdum.*

A,6. B,5. C,4. D,3. E,5. F,7.
H,24. G,20. I,15. K,21.

Deinde

Deinde trium rationum datarum a *ad* b, c *ad* d, e *ad* f *quatuor minimi, deinceps proportionales inveniantur. Primò quidem* g *minimus, quem* b *&* c *metiuntur, & simul* h *&* k *ut prius. Quod si* e *metitur ipsum* i, *toties etiam* f *metiatur* k, *eruntq;* h, g, i, k *minimi in rationibus datis iisdem fundamentis ut prius.*

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.

Si e *non metiatur* i, *invento minimo* k, *quem* e *&* i *metiantur, quoties* i *ipsum* k, g *ipsum* l *&* h *ipsum* m; *& quoties* e *ipsum* k, *toties* f *ipsum* n *metiatur. Erunt* m, l, k, n *minimi in rationibus datis ex eadem demonstratione.*

Deniq; 4 rationum datarum in numeris minimis inveniuntur quinq; directè proportionales, expditis primum, juxta præcedentem modum, quæ pro quatuor erant facienda; & deniq; cum ratione quarta s *ad* t *fiat, ut antea cum tertia. Vt in exemplis patet, in quorum priore* s *metitur* n; *in posteriore non.*

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F. 4. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105. O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315, V, 70.

PROPOSITIO V.

Theorema 3.

Plani numeri *a* & *b* rationem inter se habent ex lateribus compositam *c ad e, & d ad f; vel ex c ad f, & d* ad *e.*

A,24. B,48.
G, 18.
C,4. D,6. E,3. F,16.

A,24. B,48.
G,96.
C,4. D,6. F,16. F,3.

Ex multiplicatione d *in* e *fiat* g. *Cum ergò* d *multiplicans* c *&* e *producat* a *&* g, α *erit* a *ad* g, *ut* c *ad* e ; *&* g *ad* b, *ut* d *ad* f, *quia* c *in* d *&* f *illos producit. Sunt ergo deinceps proportionales* a, g, b *in laterum* c *ad* e, *&* d *ad* f *proportionibus. Sed ratio* a *ad* b β *componitur ex rationibus* a *ad* g, *&* g *ad* b, *Ergò & ex rationibus laterum* c *ad* e, *&* d *ad* f. *Eodem modo ostenditur* a *ad* b *ratio composita ex rationibus* c *ad* f, *&* d *ad* e.

α. 17. VII.

β 17. def. VII.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Theorema 4.

Si ſint quotcunque numeri *a*,*b*,*c*, *d*,*e*, deinceps proportionales, primus, *a* autem ſecundum *b* non metiatur; neque alius quiſquam ullum metietur.

A,16. B,24. C,36. D,54. E,81.
F,4. G,6. H,9.

Quia enim eædem duorũ proximorum ſunt rationes, patet, ſi primus ſecundum non metiatur, quod nec ſecundus tertium & hic quartum, & hic quintum poßit metiri. Quod verò nec quisquam α 2. IIX;
quemquã reliquorum metiatur, ita patet. α *Sumtis n.* f, g, h *minimis in* a, *a d* b *ratione erit exæquo, ut* a *ad* c, *ita* f *ad* h. *Cumq; ſit etiam ut* a *ad* b, *ita* f *ad* g, ~~Ergò f nõ ex~~ *&* a *non metiatur* b; *Ergo nec* f *metiatur* g, *& proinde non eſt unitas. Quare cum* β 1. IIX.
f *&* h β *ſint primi*, f *non metitur* h, *adeoq; nec* a *ipſum* c. *Quod ipſum de reliquis etiam demonſtratur.*

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Si ſint quotcunque numeri *a*,*b*,*c*,*d*,*e*

deinceps proportionales, primus autem *a* extremum *e* metiatur; is *a* etiam metietur secundum *b*.

A,3. B,6. C,12. D,24. E,48.

a 6.IIX. *Si enim* a *non metiretur* b, *neq; a metiretur aliorum quenquam, atq; ita nec* a *ipsum* e, *contra hypothesin.*

PROPOSITIO IIX.

Theorema 6.

Si inter duos numeros *a*, *b*, medij, *c*, *d* continua proportione ceciderint; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios *e*, *f* eandem cum illis habentes rationem medij *l*, *m*, continua proportione cadent.

A, 24. C,36. D, 54. B, 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40.

A, 40.	C, 20.	D, 10.	B, 5.
G, 8.	H, 4.	I, 2.	K, 1.
E, 8.	L, 4.	M, 2.	F, 1.

A, 27.	C, 9.	D, 3.	B, 1.
G, 27.	H, 9.	I, 3.	K, 1.
E, 108,	L, 36.	M, 12.	F, 4.

α *Sumtis enim totidem* g, h, i, k *in ratione* a *ad* c *minimis, ex æquo est, ut* a *ad* b, *&* e *ad* f, *ita* g *ad* k. *Cumq;* g *&* k *inter se sint primi tanquam extremi minimorum & in sua ratione* β *minimi*, γ *æquè metietur*, g *ipsum* e, *&* k *ipsum* f. *Quoties autē* g *&* k, *metiuntur* e *&* f, *toties metiantur* h *&* i *alios* l *&* m. *Itaq; cum* g, h, i, k, *per eundem numerum metiantur* e, l, m, f, *erunt hi producti ab illo numero* δ *in* g, h, i, k, *in eadem cum ipsis ratione. Sunt autem* g, h, i, k *continuè proportionales. Ergò &* e, l, m, f. *Et cum multitudine sint pares numeris* a, c, d, b, *cadent tot medij inter* ef, *quot inter* ab.

α 2. VII.
β 23. VII.
γ 21. VII.
δ 18. VII.

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Si duo numeri *a, b* sint inter se primi, & inter eos medij *c, d*, conti-

nua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter utrumque eorum *a* & *b*, ac unitatem *g*, medij *e*, *g*, & *f i* continua proportione cadent.

O, 1.	E, 2.	G, 4.	K, 8.	A, 8.
	F, 3.	H, 6.	L, 12.	C, 12.
		I, 9.	M, 18	D, 18.
			N, 27.	B, 27.

α 2.IIX. *Inventis* e,f *in ratione* a *ad* c *minimis*, α *sumantur in eadem ratione tres* g, h, i *&* *quatuor* k,l,m,n *vel plures, dum multitudine æquales fiant initio positis* a,c,d,b. *Itaq; cum* ab *sint primi*,
β 1.IIX. β *erunt* a,c,d,b *minimi in ratione* e *ad* f; *sint verò &* k,l,m,n *in eadem ratione minimi; erunt ipsis* a,c,d,b *æquales, singuli singulis. Cæterum quia* e *multiplicans seipsum producit* g; *multiplicans verò ipsum* g *facit* k; γ *metietur* e *ipsum* g *per* e, *&* g *ipsum* k *per eundem* e. δ *Metitur verò &* o
γ 7.ax. *ipsum* e *per* e. *Aequè igitur metitur* o *ipsum* e, *&*
δ 5.ax. e *ipsum* g, *&* g *ipsum* k: *Ideoq; eadem pars erit* o
ε 20.def. VII. *ipsius* e, *&* e *ipsius* g, *&* g *ipsius* k; *adeoq;* ε *proportionales deinceps* o,e,g,k; *Perinde ut &* o,f,i,n. *Cumq; &* o,e,g,k, *&* o,f,i,n *sint multitudine æqua-*

quales ipsis k,l,*m*,n *vel* a,b,c,d *cadent tot medij continuè proportionales inter* o,k *vel* o,a, *ac inter* o,n *vel* b,o, *quot inter* a, b.

PROPOSITIO X.

Theorema 8.

Si inter duos numeros *a*,*b* & unitatem *p* continuè proportionales ceciderint numeri *c d e*; quot inter utrumque ipsorum *a vel b*, & unitatem *p* deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos *a & b* medij, *m*,*n*,*o* continua proportione cadent,

				A 81
			E 27	M 162
		D 9	K 54	N 324
	C 3	I 18	L 108	O 648
P 1	F 6	G 36	H 216	B 1296

α *Completis spacijs intermedijs* i, k *&* h, m, n *&* o, *ut* i *fiat ex* c *in* f; k l *ex* c *in* i, g, m, n, o *ex* c *in* k, l, h. *Cum ergò sit ut* p *ad* c, *ita* c *ad* d, *&* d *ad* e, *&* e *ad* a, β *æquè* p *metietur ipsum* α 2.IIX.

c, & c ipsum d, & sic deinceps. Sed p metitur c per c: Ergo & c ipsum d, & d ipsum e & e ipsum

γ 9. ax. a per c metietur. γ Quare c multiplicans seipsum fecit d, multiplicans d fecit e, & multiplicans e fecit a. Idemq; de f, g, h, b est statuendum. Pro-

δ 18. VII. inde, cum c multiplicans c & f, faciat d & i, δ erit ut c ad f, ita d ad i; itemq;, ut c ad f, ita i ad g. Sunt ergò d i g continuè proportionales in ratione, c ad f. Rursus & e, k, l, h sunt continuè proportionales: quia enim c in d, i, g fecit e, k, l, ejusdem δ erunt e k l rationis cujus d i g, id est, c ad f; itemq;, & c & f in g fecerint l & h; erit, ut c ad f, ita l ad h. Eodemq; modo continuè proportionales ostenduntur a, m, n, o, b in ratione c ad f, quia ex c in e k, l, h fiunt a, m, n, o, & ex c & f in h, fiunt o & b. Tot itaq; medij proportionales inter a & b cadent, quot inter a vel b & unitatem e, quia multitudine conveniunt.

PROPOS: XI.

Theorema 9.

Duorum quadratorum numerorum *a* & *b*, unus *e* medius proportionalis est numerus; & Quadratus *a* ad Quadratum *b* duplicatam habet lateris *c* ad latus *d* rationem

Si e

A,9. E,21. B,49.
C,3. D,7.

Ex c in d *fiat* e: *& α erit, ut* c *ad* d, *ita* a *ad* e *&* e *ad* b, *adeoq; tres continuè proportionales in ratione* c *ad* d; *caditq; inter* a *&* b *medius proportionalis* e. *Cum vero* a *ad* b *habeat rationem*, β *duplicatam ejus, quam* a *ad* e, *habet quoq; duplicatã* a *quadratus ad* b *quadratum ejus, quam* c *latus, ad* d *latus, quod eadem hic sit ratio, quæ ibi.* α 17. VII. β 16. def. VII.

PROPOS: XII.

Theorema 10.

Duorum cuborum numerorum *a* & *b*, duo medij proportionales sunt numeri, *h*, *i*. & cubus *a* ad cubum *b* triplicatam lateris *c* ad latus *d* habet rationem.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

Compleantur spacia e, g, f, *&* h, i, *ut in 10. hujus fiebat. Et* α *erunt* e, g, f *tres continuè proportionales in ratione* c *ad* d, *ut &* a, h, i, b, α 17. VII.

quatuor; cadentq; inter cubos a, b *duo medij; Cum verò primus* a *ad quartum* b *habeat rationem triplicatam ejus quam primus* a *ad* h *secundum; habebit etiam à cubus, ad* b *cubum rationem triplicatam, laterum* c *ad* d, *cum* a *ad* h *sit, ut* c *ad* d.

a 26. def. VII.

PROPOSITIO XIII.

Theorema II.

Si sint quotlibet numeri *a*, *b*, *c* deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, faciat aliquos *d*, *e*, *f*; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri, *a b c*, primùm positi multiplicantes jam factos *d*, *e*, *f*, fecerint aliquos *g*, *h*, *i* ipsi quoqne proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eveniet.

A, 2.	B, 4.	C, 8.						
D, 4.	N, 8.	E, 16.	O, 32.	F, 64.				
G, 8.	P, 16.	Q, 32.	H, 64.	K, 128.	S, 256	I, 512.		
K, 16	T, 32	V, 64	X, 128	L, 256	Y, 512	Z. 1024	a 2048	m, 4096

Ex

Ex a *in* b *fiat* n, *&* o *ex* b *in* c: *Fiant item* p, q *ex* a *in* n, e; *&* r, s, *ex* b *in* o, f: *Item* t, u, x, *ex* a *in* p, q, h; *&* y, z, a *ex* b *in* r, s, i. *Cùm ergò* a *multiplicans ſeipſum &* b *fecerit* a *&* n; α *Erit, ut* a *ad* b, *ita* d *ad* n: *Ita, cum* n *&* e *ſint ex* b *in ſe &* a; *Erit etiam, ut* a *ad* b, *ita* n *ad* e; *& ita* d, n, e *continuè proportionales ſunt in ratione* a *ad* b. *Proportionales etiam ſunt continuè* e, o, f, *quia ex* b *in ſe & in* c *fieret* e *&* o; *ex* c *in ſe & in* b *fiunt* o *&* f, α *eiusdem rationis cum* b, c, *id eſt, cum* a, b. *Quoniam ergò* d, n, e *&* e, o, f *ſunt in eadem ratione continuè proportionales, ex æquo erit, ut* d *ad* e; *ita* e *ad* f; *& ita* d, e, f *continuè proportionales erunt. Deinde in eadem ratione continuè proportionales ſunt* g, p, q, h, *cum* g, p, q *fiant ex* a *in* d, n, e, *& ex* a, b *in* e *fiant* q *&* h: *Similiter &* h, r, s, i, *cum* h, r, s *fiant ex* b *in* e, o, f, *&* s, i *ex* b, c *in* f. *Eſt ergò ex æquo ut* g *ad* h, *ita* h *ad* i. α 17. VII.

Eodemq; modò k, l, m *continuè demonſtrantur proportionales.*

PROPOS: XIV.

Theorema 12.

Si Quadratus numerus *a* Quadra-

dratum numerum *b* metiatur: & latus *c* unius *a* metietur latus *d*, alterius *b*. Et, si unius Quadrati *a* latus *c* metiatur latus *d* alterius *b*; & Quadratus *a* Quadratum *b* metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

Fiat e *ex* e *in* d. α *Erunt* a, e, b *continuè proportionales in ratione* c *ad* d. *Cumq;* a *primus* b *tertium metiatur,* β *metietur etiam* e *medium.* *Ideoq;, cum sit, ut* a *ad* e, *ita* c *ad* d, β *metietur etiam latus* c *latus* d. *Rursus, si latus* c *metiatur latus* d, β *metietur etiam quadratus* a *quadratum* b, *cum in eadem ratione continuè* α *proportionalibus existentibus* a, e, b; a *ipsum* e *æquè* β *metiatur, atq;* c *ipsum* d, *& ita etiam* a *quadratus* b *quadratum.*

α 11. IIX.
β 7. IIX.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si cubus numerus *a*, cubum numerum *b* metiatur; & latus *c* unius *a* metietur latus *d* alterius *b*. Et si latus *c* unius *a* cubi latus *d* alterius *b*

meti-

metiatur; & cubus *a* cubum *b* metietur.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

Completis iterum spaciјs e, g, f, *&* h, i *ut in* 10, *hujus factum est.* α *Erunt &* e, g, f *&* a, h, i, b *continuè proportionales. Cumq;* a *primus metiatur extremum* b, β *metietur etiam secundum* h *& propter eandem rationem latus* c *quoq;* d *latus metietur. Rursus si* c *latus metiatur latus* d, *metietur etiam cubus* a *cubum* b. *Continuè enim existentibus proportionalibus* a, h, i, b *in ratione* c *ad* d, *æquè metietur* c *ipsum* d, *&* a *ipsum* h, *& sic etiam extremum* b, *cubus cubum.*

α 12. IIX.
β 7. IIX.

PROPOS: XVI.

Theorema 14.

Si Quadratus numerus *a* Quadratum numerum *b* non metiatur; neque latus *c* unius *a* metietur alterius *b* latus *d*. Et si latus *c* unius *a* quadrati non metiatur latus *d* alterius

us *b*: neque quadratus *a* quadratum *b* metietur.

A, 16. B,81.
C,4. D,9.

Si C latus metiretur latus d, *etiam* a *quadratus* c, *a metiretur quadratum* b *contra hypothesin. Et contra, si quadratus* a, *quadratum* b *metiretur, etiam C latus* d; *itidem contra hypothesin.*

a 14. IIX.

PROPOS: XVII.

Si cubus numerus *a* cubum numerum *b* non metiatur: neq; latus *c* unius *a* latus *d* alterius *b* metietur. Et si latus *c* cubi unius *a* latus *d* alterius *b* non metiatur: neq; cubus *a* cubum *b* metietur.

A, 8. B, 27.
C, 2. D, 3.

Si enim latus c, *metiretur latus* d, *etiam a metiretur* a *cubus Cubum* b *contra hypothesin. Et contra, si cubus* a *cubum* b *metiretur; etiam latus* c *latus* d *metiretur, itidem contra hypothesin.*

a 15. IIX.

PROPOS: XIIX.

Theorema 16.

Duorum similium planorũ numerorum *a* & *b* unus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homo-

mologi *c vel d* ad latus homologum *e vel f* rationem.

A,12. G,18. B,27.
C,6. D,2. E,9. F,3.

Fiat g *ex* d *in* e. *Cum sit ut* c *ad* d, *ita* e *ad* f; *erit permutãdo* c *ad* e, *ut* d *ad* f. *Cum ergò* d *multiplicans* c *&* e *producat* a *&* g, *α erit* a *ad* g, *ut* c *ad* e. *Sic etiam erit* g *ad* b, *ut* d *ad* f, *quia* e *multiplicans* d *&* f *producit* g, *&* b. *Itaq;* a, g, b *sunt proportionales in rationibus* c *ad* e *&* d *ad* f, *adeoq; inter* a *&* b *cadit* g *medius proportionalis*. *Et quia proportionales sunt* a, g, b, *habebit* a *ad* b *rationẽ duplicatam ejus, quam* a *ad* g, *i. e.* c *ad* e *vel* d *ad* f. *Itaq; planus* a *ad planum* b *duplicatam habet rationem laterum homologorum*. α 17. IIX.

PROPOS: XIX.

Theorema 17.

Duorum similium solidorum numerorum *a, b* duo *m, n* medij proportionales sunt numeri: Et solidus *a* ad solidum *b* triplicatam habet rationem lateris homologi *c vel d vel e* ad latus homologum *f vel g, vel h*.

A,30. M,60. N,120. B,240.
I,6. L,12. K,24.
C,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10.

Fiat i *ex* c *in* d, *&* k *ex* f *in* g, *&* l *ex* d *in* f. *&* m, n *ex* e, h *in* l. *Cum ipsis* f, g, h *proportionales sint* c, d, e, *etiam permutando proportionales erunt, ut* c *ad* f, *ita* d *ad* g *&* e *ad* h. *Et quia* d *multiplicans* c *&* f *producit* i *&* l, *α erit, ut* c α 17. IIX.

ad f

ad f, *ita* i *ad* l: *&, ut* d *ad* g, *ita* l *ad* k; *quia* l *&* k *fiunt ex* f *in* d, g; *adeoq;* i, l, k *sunt continuè proportionales in ratione* c *ad* f, *vel* d *ad* g. *Quia verò* a *solidus factus est ex* c, d, e *lateribus, &* i *ex* c *in* d, *fit, ut* e *multiplicans* i, *faciat* a. *Ita cum* b *solidus sit factus ex* f, g, h *lateribus*, k *verò ex* f *in* g, *fit ut* b *solidum faciat*, h *multiplicans* k. *Quare cum* e *multiplicans* i, l *fecerit* a, m; *erit* a *ad* m *ut* i *ad* l, *id est, ut* c *ad* f, *vel* d *ad* g, *vel* e *ad* h; *Sic etiam* n *ad* b, *ut* l *ad* k, *id est, ut* c *ad* f; *cum* h

β 18. VII. *multiplicans* l, k, *fecerit* n, b. β *Est autem &* m *ad* n, *ut* e *ad* h, *quod* e, h *multiplicantes* l *fecerint* m, n. *Sunt ergò* a, m, n, b *continuè proportionales in ratione* c *ad* f; *adeoq;* *inter* a b *similes solidos cadunt medij proportionales* m, n. *Et quia* a, m, n, b *sunt* 4. *continuè proportionales* γ *habe-*

γ 26. def. VII. *bit solidus* a *ad solidum* b *similem rationem ejus, quam* a *ad* m, *id est,* c *ad* f, d *ad* g, *&* e *ad* h, *id est, triplicatam ex ratione* c *ad* f *laterum homologorum.*

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Si inter duos *a*, *b* numeros unus medius proportionalis cadat numerus *c*; similes plani erunt illi numeri *a* & *b*.

A, 18.

A,18. C,24. B,32.
D,3. E,4. F,6. G,8.

Sumti minimi d,e *in ratione* a,c α *metiuntur æquè ipsos* a,c *per* f,*&* *ipsos* c,b *per* g. *Itaq;* f *multiplicans* d,e β *producit* a,c,*&* g *eosdem* d,e *multiplicans producit* c,b. *Itaq; cum* e *multiplicans* f,g *faciat* c,b,γ *erit,ut* c *ad* b, *id est, ut* d *ad* e,*ita* f *ad* g; *&* *permutando,ut* d *ad* f, *ita* e *ad* g. *Cùm verò* a *fiat ex* d *in* f, *erit planus, cujus latera* d *&* f, *sunt proportionalia lateribus* e *&* g, *ex quibus fit* b *planus. Erunt itaq;* a b *plani similes.*

α 21. VII.
β 9. ax.
γ 17. VII.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Si inter duos numeros *a*, *b* duo medij proportionales cadant numeri *c*, *d*; similes solidi sunt illi numeri *a*,*b*.

A,24. C,72. D,216. B,648.
E,1. F,3. G,9.
H,1. I,1. M,24. K,3. L,3. N,72.

Cum α *sumtis tribus minimis* e,f,g *in ratione* a,c,d,b,*inter* e *&* g *cadat medius proportio*-

α 9. IIX.

β 20. IIX. *nalis* f; β *erunt* e *&* g *plani similes, quarum latera sint* h, i, k, l. *Et quia* e, f, g *sunt in ratione data minimi, æquè metiuntur ipsos* a, c, d *rationis ejusdem per* m; *&* *eodem modo* e, f, g *minimi ipsos* c d, b, *ejusdem rationis metiuntur per* n; *ita ut* m *&* n *multiplicantes* e, f, g *producant* a, c, d *&* c, d, b. *Facti autem sunt* e *&* f *ex suorum laterum* h, i, *&* k, l, *multiplicatione mutua. Ergo,* a, b *producuntur ex multiplicatione mutua* h, i, m, *&* k, l, n, *&* *sunt solidi. Quia verò ex* m, n *in* f *fiunt* c, d, *ut supra patet,* γ *erit* c *ad* d, *ut* m *ad* n:
γ 18. VII δ 17. VII. *Sed* c *ad* d δ *est, ut* e *ad* f, (*quia* n *multiplicans* e f *facit* c d) *id est, ut* h *ad* k, *vel* i *ad* l. *Inter planos enim similes* e, g, *est medius proportionalis* f e *in ratione laterum homologorum* h, k *vel* i, l: *Igitur*
ε 19. IIX. h *ad* k *&* i *ad* l *erunt, ut* m *ad* n; *&* *permutando* h *ad* i, *ut* k *ad* l; *&* i *ad* m, *ut* l, *ad* n. *Sunt ergò latera* h, i, k *proportionalia lateribus* k, l, n; *ac propterea similes* a, b *solidi.*

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si tres numeri *a*, *b*, *c* deinceps sint proportionales, primus *a*, autem sit quadratus; & tertius *c* quadratus erit.

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
F, 1.

Sumto

Sumto d *latere quadrati* a, *cum* d *in se faciat* a α *erunt* d *&* a *ab* f *unitate continuè proportionales, & convertendo* a *ad* d, *ut* d *ad* f. *Cum ergò inter* a *&* c *cadant to: medij, quot inter eundem* a *&* f β *cadent etiam inter* c *&* f *tot; videlicet* e. *Cum itaq;* f, e, c *continuè proportionales sint, producetur* c *ex* e *in se, eritq; quadratus.* α 9. IIX. β 10. IIX.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 21.

Si quatuor numeri *a, b, c, d* sint deinceps proportionales, primus *a* autem sit cubus; Et quartus *d* cubus erit.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
F, 16. H, 100.
E, 4. H, 10.
I, 1.

Sumto e *latere cubi* a, *ex* e *in se fiat* f; *& ex* f *in* e, *cubus* a. *Quia ergò in se facit* f, *& in* f *facit* a, α *erunt* e f a *ab unitate continuè proportionales; & convertendo* a, f, e, i *continuè proportionales. Cum ergò inter eundem* a *&* d, *cadant tot medij continuè proportionales, quot inter* a *&* i, β *cadent inter* d *&* i *totidem. Quare cum* i, c, h, d *sint continuè proportionales, fiet* h *ex* g *in se, &* d *ex* g *in* h, *eritq;* d *cubus.* α 9. IIX. β 10. IIX.

PROPOS: XXIV.

Theorema 22.

Si duo numeri rationem habeant inter se, *ut a ad b*, quam Quadratus numerus ad Quadratum numerum *ita c ad d*, primus *a* autem sit Quadratus, & secundus *b* Quadratus erit.

A,36. F,48. B,64.
C,9 E,12. D,16.

Cum enim sit a *ad* b, *ut* c *ad* d, *interq;* c *&* d *α cadat medius proportionalis, etiam inter* a, b,
α 11.IIX. *β cadet medius* f. *Cum ergò* a, f, b *sint continuè*
β 8.IIX. *proportionales, &* a *primus Quadratus, etiam* b
γ 22.IIX. *tertius Quadratus γ erit.*

PROPOSITIO XXV.

Theorema 23.

Si duo numeri rationem inter se habeant *a ad b*, quam cubus numerus ad cubum numerum *c ad d*, primus *a* autem sit cubus, & secundus *b* cubus erit.

A,8.

A,8. G,12. H,18. B,27.
C,64. E,96. F,144. D,216.

Cum enim ſit a *ad* b,*ut* c *ad* d; *interq;* c *&* α 12. IIX.
d α *cadant duo medij proportionales*, e *&* f, β *ca-* β 8. IIX.
dent etiam g,h *inter* a *&* b. *Cùm ergo* a,g,h, γ 23. IIX.
b *ſint continuè proportionales, &* a *primus cubus*
ſit, γ *erit &* b *quartus cubus.*

Corollarium 1.

Proportio cujusvis numeri Quadrati ad quemlibet non quadratum, non poteſt reperiri in duobus numeris Quadratis. *Quia ex 24. hujus ipſi quoq; Quadrati eſſent.*

Corollarium 2.

Nec inter cubum & non cubum cadit ratio cuborum; *ob eandem cauſam ex 25.*

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 24.

Similes plani numeri inter ſe rationem habent *a ad b*, quam quadratus numerus ad quadratū numerū *ut d ad f.*

A,20. C,30. B,45.
D,4. E,6. F,9.

Cum a *&* b *sint plani similes, α cadit inter eos unus medius proportionalis* c: *Sumtis ergò tribus minimis in* a,c,b *ratione continua, β erunt extremi* d,f *quadrati. Quare cum sit ex æquo* a *ad* b, *ut* d *ad* f, *patet* a *ad* b *esse ut* d *quadratus ad* f *quadratum.*

α 18. IIX.
β 1. cor. 2. IIX.

PROPOS: XXVII.

Theorema 25.

Similiter solidi numeri *a* ad *b* rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum *e* ad *h*.

A,240. C,360. D,540. B,810.
E,8. F,12. G,18. H,27.

Cum a *&* b *sint solidi similes, α cadunt inter eos duo medij proportionales* c,d, *Sumtis ergò quatuor minimis* e,f,g,h *in ratione continua* a,c,d, b, *β erunt extremi* e,h *cubi. Quare cum sit ex æquo* a *ad* b, *ut* e *ad* h *patet,* h; *ad* b *esse, ut* e *cubus ad* h *cubum Quod erat propositum.*

α 19. IIX.
β 1. cor. 2. IIX.

EU-



EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER IX.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

SI duo similes plani numeri *a*,*b* multiplicantes se mutuo faciant quẽdam *c*; productus *c* erit Quadratus.

A,6. E, 54.

D,36. E,108. C,324.

A multiplicans seipsum faciat d *quadratum.* * 17. VII.
Cumq; itaq; ex a *in* a *&* b *fiant* d *&* c * *erit, ut* a *ad* b, *ita* d *ad* e. *Sed inter* a *&* b

β 18. IIX. *ceu planos similes unus β cadit medius proportionalis.* γ. 8. IIX. *Ergò & inter* d *&* c *unus γ cadit, nempe* E. γ 22. IIX. *Itaq; cũ tres* d, e, c *sint continuè proportionales, & primus sit quadratus, δ erit etiam* c *tertius quadratus.*

PROPOS: II.

Theorema 2.

Si duo numeri *a*, *b* se mutuò multiplicantes, faciant Quadratum *c*; similes plani erunt *a*, *b*.

A, 6.	B, 54.
D. 36.	C, 324.

α 17. VII. *A multiplicans seipsum faciat* d *quadratum.* β 11. IIX. *Erit, ut* a *ad* b, *ita* d *ad* c, *quia* a *multiplicans* a *&* γ 8. IIX. b, *produxit* d *&* c. δ 20. IIX. *Sed inter* d, c *quadratos cadit unus medius proportionalis: Ergò & inter* a, b *γ cadit unus, ac propterea* a, b *δ erunt plani similes.*

PROPOS: III.

Theorema 3.

Si cubus numerus *a* seipsum multiplicans, procreet aliquem *b*; productus *b* cubus erit.

A, 8.

A,8.

E,16. D,4.

F,32. C,2.

B,64. I,1.

Sit C *latus cubi* a, *ex quo in se fiat* d, *& ex* c *in* d *ipse cubus* a. *Itaq;* α *metietur* c *ipsum* d *per* c. *Sed & unitas* i *eundem* c β *metitur per* c. *Ergò unitas ipsius* c *est eadem pars, quæ* c *ipsius* d. γ *Quare ut unitas ad* c, *ita* c *ad* d. *Rursus etiam* d α *metitur* a *per* c, *quòd* c *multiplicans* d *fecit* a. *Sed quia etiam* c *metiebatur* d *per* c; *Ergò* d *ipsius* a *erit eadem pars, quæ* c *ipsius* d, γ *Ergò est ut* c *ad* d, *ita* d *ad* a. *Sed ut est* c *ad* d, *ita erat unitas ad* c. *Ideoq; ut unitas ad* c *ita* c *ad* d *&* d *ad* a: *adeoq; inter unitatem &* a *cadunt duo medij proportionales.* α 7. ax. β 5. ax. γ 20. def.

Cæterum quia a *metitur* b *per* a; *quod* a *in se producebat* b, *& unitas eundem* a *per* a *metitur, erit unitas eadem pars ipsius* a, *quæ* a *ipsius* b; *& sic, ut* i *ad* a, *ita* a *ad* b. *Sed cum inter* i *&* a *cadant duo medij proportionales, ergò totidem inter* a *&* b, δ *cadent* f *&* e. *Cum itaq; inter quatuor* a, e, f, b *continuè proportionales primus sit cubus,* ε *erit etiam quartus* b *cubus.* δ 8. IIX. ε 23. IIX.

PROPOS: IV.

Theorema 4.

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Si cubus numerus *a* cubum numerum *b* multiplicans, faciat aliquem; factus cubus erit.

A, 8, B, 27.
D, 64. C, 216.

A in se perducat d. *Quia ergò ex* a *in* a *&* b
α 17. VII. *fiunt* d *&* c, α *erit ut* a *ad* b, *ita* d *ad* c. *Sed inter*
β 12. IIX. a *&* b *cubos* β *cadunt duo medij proportionales* : γ
γ 8. IIX. *Ergò & inter* d *&* c. *Quare cum* d *primus* δ *fit*
δ 3. IX. *cubus, &* c *quartus* ε *cubus erit.*
ε 23. IIX.

PROPOS: V.

Theorema 5.

Si cubus numerus *a* numerum quendam *b* multiplicans faciat cubum *c*; & multiplicatus *b* cubus erit.

A, 8. B, 27.
D, 64. C, 216.

α 3. IX. *A in se producat* d, α *cubum. Cum ergò ex* a
in a

in a *&* b *fiant* d *&* c, β *erit, ut* a *ad* b, *ita* d *ad* c. β 17. VII.
Sed inter d, c, *cubos cadunt duo medij proportiona-* γ 12. IIX.
les. δ *Ergò & totidem inter* a *&* b; *adeoq;* a *exi-* δ 8. IIX.
stente cubo etiam b *cubus* ε *erit.* ε 23. IIX.

PROPOS: VI.

Theorema 6.

Si numerus *a* seipsum multiplicans, faciat cubum *b*; Et ipse *a* cubus erit.

A,8. B,64. C,512.

Ex a *in* b *fiat* c, *qui ex definitione est cubus.* α 5. IIX.
Quoniam ergò b *cubus multiplicans* a, *fecit* c, α *erit &* a *cubus.*

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si compositus numerus *a* aliquē *b* multiplicans, quempiam *c* faciat: factus *c* solidus erit.

A,6. B,7. C,42.

D,2. E,3.

Quia enim a *est solidus,* α *metitur ipsum alius præter unitatem, ut* d *per* e; *Ergò &* d *in* e β *producit* a. *Cum ergò* b *in* a *faciat* c, *erit* c *ex trium* d, e, b, *ceu laterum multiplicatione mutua ortus, adeoq; ex definitione solidus.* α 13 def. VII. β 9. ax.

PRO-

PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Si ab unitate quotcunque numeri *a,b,c,d,e,f,g,h,i,k,l,m,* deinceps proportionales fuerint: Tertius *b* quidem ab unitate Quadratus eſt, & unū intermittentes *d, f, h, k, m,* omnes: Quartus *c* autem eſt cubus, & duos intermittentes *f,i,m,* omnes: Septimus *f* verò cubus ſimul & Quadratus, & quinque intermittentes *m* omnes.

Vn.1. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. H,6561. I,19683. K,59049. L,177147. M,531441.

Cum enim unitas α *metiatur* a *per* a, *metietur quilibet ſequentem per ipſum* a, *quia continuè proportionales ſunt:* β *Ideoq;* a *multiplicans ſeipſum producit* b *quadratum. Cumq;* b, c, d *ſint continuè proportionales, &* b *Quadratus, etiam* d γ *erit Quadratus: ita & trium ſequentium proportionalium tertius* f *erit Quadratus, & iterum* h, k, m *&c. Rurſus cùm* a *in ſe faciat* b, *& idē* a *in* b *faciat* c, *erit*

α 5. ax.
β 9. ax.
γ 22. IIX.

c, erit ex definitione c cubus. Ergò cum 4. proportionalium c,d,e,f primus c sit cubus δ erit & quartus f cubus. Deniq; cum septimus ab unitate f & Quadratus & cubus sit demonstratus; etiam intermissis quinq; g,h,i,k,l; m erit & Quadratus & cubus. δ 23. IIX.

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Si ab unitate quotcunque numeri *a,b,c,d,e,f*, deinceps proportionales fuerint, qui verò post unitatem *a* sit Quadratus; & reliqui omnes *b,c, d,e,f*, Quadrati erunt. Ac si qui post unitatem *a* sit cubus, & reliqui omnes *b,c,d,e,f*, cubi erunt.

A,4. B,16. C,64. D,256, E, 1024.
1. *Vnitas.* F, 4096.
A,8. B,64. C,512. D,4096. E,32768
F,262144.

Quia enim b *tertius ab unitate* a *est Quadratus, & unum intermittentes, omnes* d, f, *suntq;* a, b, c *continuè proportionales, &* a *primus quadratus,* β *erit &* c *Quadratus. Eodem modo inter* c α 8 IX. β 22. IIX.

ter c,d,e *proportionales* c *existente quadrato, etiam* e *quadratus erit, & sic deinceps reliqui erunt quadrati. Ita si* a *primus ab unitate sit cubus: Quia* c *ab unitate quartus* a *est cubus & duos intermittentes omnes, etiam* f *erit cubus. Cumq; unitas metiatur* a *per* a, *&* a *cubus metiatur* b *per*
γ 3. IX. *seipsum, γ erit &* b *cubus. Cum itē* a,b,c,d *sint*
δ 23. IIX. *4. continuè proportionales, &* a *primus sit cubus, δ erit &* d *quartus cubus. Eodemq; modo reliqui ordine cubi ostendantur, sumtis semper continuè proportionalibus, ut* b,c,d,e. *Quia enim* b *est cubus. Ergò &* e *&c.*

PROPOS: X.

Theorema 10.

Si ab unitate quotcunque numeri (*a,b,c,d,e,f,g,h,i,k,l,m*) deinceps proportionales fuerint, qui *a* verò post unitatem non sit quadratus, neque alius ullus quadratus erit, præter tertium *b* ab unitate & unum intermittentes omnes *d,f,h,k,m*. At si post unitatem non sit cubus, neque alius ullus cubus erit, præter quartū *c* ab unitate, & duos intermittentes omnes *f, i,m*.

1. Vn.

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.
1. *Vnitas.* G, 128. H, 256.
I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

Si enim aliquis alius esse potest quadratus, esto c, *Quoniam est, ut* a *ad* b, *ita* b *ad* c; *convertendo* c *ad* b *erit, ut* b *ad* a. *Sed* c *est quadratus ex hypothesi:* α *Ergo & a. Quod absurdũ. Quia ponitur non quadratus. Idẽ etiã de cæteris concludendũ. Ita, siquis alium, ut* d *præter* c *ponat cubum, quia* a, b, c, d *sunt continuè proportionales, conversim proportionales erunt. Itaq; cum* d *primus sit cubus, etiam* a *quartus cubus* β *erit. Quod est contra hypothesin.* α 22. IIX. β 23. IIX.

PROPOSITIO XI.

Theorema 11.

Si ab unitate quotcunque numeri *a,b,c,d,e,f,* deinceps proportionales fuerint, minor *b* majorem *f,* metitur per aliquem *d* eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

1. *Vn.* A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 242.
F, 729.

Cũ ex æquo sit ut b *ad* f, *ita unitas ad* d, *quod* 5. a, b, c, d, e, f, *cũ* 5. *numeris & unitate* abcd *eandẽ*

rati-

α 20. def. VII. rationem habeant, α æquè etiam Unitas metietur numerum d, atq; b ipsum f. Sed β unitas metitur d
β 5. ax. per b, ergò & b ipsum f per d metitur. Eodem modò d metitur ipsum e pro a, quod sit, ut d ad e, ita unitas ad a. Sic & a ipsum f per e metietur, cum sit ut a ad f, ita unitas ad e. Et ita de cæteris.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si ab unitate quotcunque numeri *a*, *b*, *c*, *d*, deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum ultimum *d* metiuntur, ijdem & eum *a*, qui unitati proximus est, metientur.

1. *Vn.* A,6. B,36. C,216. D,1296. E,3.

Sin minus. Si primus numerus e *metiens quidem* d, *nõ* a *metitur erũt* a *&* e *primi; & cum* a
α 31. VII. β 27. VII. γ 26. VII. *multiplicans seipsum producat* b, β *erunt &* e *&* b *inter se primi;* γ *itemq; &* e *&* c, *cum* c *ex* a *in* b *primis ad numerum* e *fiat.* γ *adeoq; &* e *&* d *inter se erunt primi, cum* d *ex* a *in* c *fiat. Quod est contra hypothesin, quæ* e *ipsum* d *metiri ponebat.*

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Theorema, 13.

Si ab unitate quotcunque numeri *a*, *b*, *c*, *d*, deinceps proportionales fuerint, qui verò *a* post unitatem, primus sit; Maximum *d* nullus alius metietur, præter eos *a*, *b*, *c*, qui sunt in numeris proportionalibus.

1. Vn. A,5. B,25. C,125. D,625.
H - - - - - G - - - - F - - - - - E - -

Metiatur ipsum d, *diversus ab* a, b, c, *qui sit* e; *erit ille vel primus, vel compositus. Si sit primus, metiens extremum* d, α *metietur etiam* a *primum. Quod absurdum. Cum ergò* e *non sit primus, esto compositus,* β *metiens ipsum primus alius præter* a *nullus erit. Nam cum* e *metiatur extremum* d, *quilibet primus metiens* e, γ *metietur &* d, *metiens verò* d *maximum,* α *metitur &* a *unitati proximum; proinde duo primi se mutuò metientur, quod absurdũ, aut metiens ipsum* e *primus, erit ipse* a.

α 12.IX.
β 33.VII.
γ 11.ax.

Porrò metiatur a *ipsum* e *per* f. *Itaq;* a δ *multiplicans* f *&* c *binos, faciet binos* e *&* d; δ *eritq;* e *ad* d, *ut* f *ad* c. *Quare si* e *metitur* d, *etiam* f

δ 17.VII.

metitur c: *adeoq; & f eodem modo, ut* c, *compositus erit, quem solus* a *metitur. Metiatur ergò* a *ipsum* f *per* g. *Ideoq;* a *binos* g *&* b *multiplicans producet* f *&* c, *eritq;* f *ad* c, *ut* g *ad* b: *Sed* f *metitur ipsum* c, *ergò &* g *metitur* b, *Si jam* g *esset primus metiēs* b, *metiretur etiam* a. *Quod absurdum. Nullus ergò alius metitur* g *præter* a. *Deniq; metiatur* a *ipsum* g *per* h. *Binos ergo* a *&* h *multiplicans* a *producet* b *&* g, *eritq;* g *ad* b, *ut* h *ad* a. *Sed* g *metitur ipsum* b. *Ergo &* h *ipsum* a *primum. Itaq;* h *æqualis est ipsi* a. *Cum autem ex* h *&* g *producatur idem* b, *qui ex* a *in seipsum, erit* a *medius proportionalis inter* h *&* g;
e 20. VII. *cumq;* a *metiatur* g, *etiam* h *metietur* a, *primus primum. Quod absurdum. Itaq; præter proportionales* a, b, c, *nullus alius extremum* d *metitur.*

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Si minimum numerum *a*, primi numeri *b*, *c*, *d* metiantur: nullus alius primus numerus illum metietur, præter eos *b*, *c*, *d* qui à principio metiebantur.

Si

A.+++++++++++++ ++++++.++++++++

B + + C + + + D + + + + +

E - - - F - - - -

Si poteſt, metiatur e *primus ipſum* a *per* f. *Idem ergo* e *multiplicans* f *α facit* a. *Ideoq; ſinguli* b, c, d *alterum illorum* e *vel* f *β metientur. Non ipſum* e *primum; ergo ipſum* f *minorem ipſo* a. *Quod contra hypotheſin.* α 9. ax. β 32. VII.

PROPOS: XV.

Theorema 15.

Si tres numeri *a, b, c* deinceps proportionales, fuerint minimi omniũ eandẽ cum eis rationem habẽtium, duo quilibet *a b ſimul, bc, a c* numeri ad reliquum *c, a, b* primi erunt.

A, 9. B, 12.

C, 16.

D, 3. E, 4.

Sumtis duobus d, e *in eadem cum illis proportione minimis, α patet* d *in ſeipſum & e producere* a *&* b, *&* e *in ſe facere* c. *Cum itaq;* d *&* e *in ſua proportione minimi, etiam β ſint primi γ erit & uterque* d e *ſimul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compoſitus, ex* d e α 2. IIX. β 24. VII. γ 30. VII.

R 2 quàm

quã ipse d ad c primus sit, [d] erit quoq; ex d, e tanquam uno factus numerus in d ad eundem e primus. [e] Qui autem fit ex d e tanquam uno in d æqualis est & numero a facto ex d in se & numero b facto ex d in e. Igitur a b compositi primi sunt ad e, & ita ad c, qui fit ex e in seipsum.

δ 26. VII.

e 3. II.

ζ 27. VII.

B, 12. C, 16.
A, 9.
D, 3. E, 4.

Deinde quia uterq; d e simul, [γ] est primus ad quemlibet ipsorum d, e; fit, ut numerus ex d e tanquam uno, factus in e, [δ] primus sit ad d (cum tam ex d e compositus, quã ipse e primus sit ad d) Sed qui fit ex d e, tanquam uno in e [e] æqualis est & numero c facto ex e in se; & b facto ex d in e. Ergo & b c simul compositi ad d primi sunt, [ζ] adeoq; ad ipsum a. qui ex d in se est factus; primi sunt b & c simul compositi.

A, 9. C, 16.
B, 12.
D, 3. E, 4.

Deniq; quia, ut antea uterq; d & e simul ad quemlibet ipsorum [γ] primus est; & è contrario quilibet ipsorum d, e primus est ad compositum ex de; [δ] erit

erit etiam factus ex d *in* e *ad compositum ex* d e *primus, & sic ex* d *in* e *factus ad eum, qui ex* d e *tanquam uno in se primus erit. Sed qui fit ex* d e *tanquam uno in se æqualis est eis, qui fiunt ex* d 34.II.
& e in seipsos, unà cum eo qui ex d *in* e *bis. Quoniam itaq; duo numeri simul, nempe compositus ex ijs, qui fiunt ex* d *&* e *in seipsos; & ex eo, qui fit ex* d *in* e, *atq; is qui fit* d *in* e *primi sunt ad aliquem ipsorum, eum videlicet, qui fit ex* d *in* e, *ut ostensum est,* *erunt etiam duo illi, compositus ex ijs* 37.VII.
qui fiunt ex d *&* e *in seipsos & ex eo, qui fit ex* d *in* e, *atq; is qui fit ex* d *in* e *inter se primi. Rursus, quia duo numeri simul, utpote compositus ex ijs, qui fit ex* d *&* e *in seipsos, atq; is, qui fit ex* d *in* e *ad aliquem ipsorum, eum nimirum, qui fit ex* d *in* e, *primi sunt ostensi;* *erunt etiam duo illi, compositus ex ijs, qui fiunt ex* d *&* e *in seipsos, atq; is, qui fit ex* d *in* e, *inter se primi. Itaq; cum ex* d *&* e *in seipsos fiunt* a *&* c, *item ex* d *in* e *fiat* b; *erunt* a *&* c *simul compositi primi ad* b.

PROPOS.: XVI

Theorema 16.

Si duo numeri *a* & *b* primi inter se fuerint: Non erit, ut primus *a* ad secundum *b*, ita secundus *b* ad alium quendam *c*.

A + + + + +

B + + + + + + +

C - - - - - - - - - -

Esto, si potest tertius proportionalis c. *Cum*
a 23.VII. *ergò* a *&* b *sint primi, & in sua ratione* α *minimi;*
β 21.VII. *ipsi* β *æquè metientur* b *&* c *numeros in eadem ratione;* a *ipsum* b, *&* b *ipsum* c. *Cumq́ue* a *etiam metiatur seipsum. Duos ergò* a *&* b *inter se primos metietur numerus* a. *Quod absurdum.*

PROPOS: XVII.

Theorema 17.

Si fuerint quotcunque numeri *a*, *b*, *c*, *d*, deinceps proportionales, extremi autem ipsorum *a*, *d* primi inter se sint: Non erit, ut primus *a* ad secundum *b*, ita ultimus *d*, ad alium quempiam *e*.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E - - - -

α 23.VII. *Esto, si potest, ut* a *ad* b, *ita* d *ad* e. *Erit er-*
β 21.VII. *gò permutando, ut* a *ad* d, *ita* b *ad* e: *sunt au-*
γ 11. ax. *tem* a, d *primi suæ rationis* α *minimi: igitur* β *æquè metientur, ipsos* b e. *Est verò, ut* a *ad* b, *ita* b *ad* c. *Si ergò* a *metitur* b, *etiam* b γ *metitur* c. *Quia item est, ut* b *ad* c, *ita* c *ad* d; *cum* b *metiatur*

iatur c *etiam* c *metietur* d : *Quare* a *metiens* c, *metietur etiam* d. *Metitur vero* & a *seipsum. Ergò metitur* a, d *inter se primos. Quod absurdum.*

PROPOSITIO XIIX.

Problema I.

Duobus numeris *a*, *b* datis, considerare, an ipsis possit tertius proportionalis inveniri.

A, 4. B, 7.

Si a & b *dati sint primi*, α *non potest reperiri tertius proportionalis. Si non primi, tum* b *multiplicans seipsum faciet* c, *Aut ergò* a *metitur* c, *per* d, & d *est ipse tertius proportionalis: Cum enim* a *metitur* c *per* d, β *fiet* c *ex* a *in* d. *Fit autem* γ *idem* c *ex* b *in* b : *Ergò qui sub extremis* a, d *continetur* c *facto ex* b *in seipsum medio æqualis est. Quare erit ut* a *ad* b, *ita* b *ad* d.

α 16. IX.
β 9. ax.
γ 20. VII.

A, 4. B, 6. C, 36.

Aut a *non metitur* c, & *tum nequit reperiri tertius proportionalis. Si verò ponatur* d *tertius, Quia est, ut* a *ad* b, *ita* b *ad* d, *ideò numerus sub extremis* a, d *contentus, æqualis est ei, qui fit a medio* b, *id est*, c. *Cum itaq;* c *ex* a *in* d *fiat, metietur* a *ipsum* c *per* d, *quod absurdum. Quia ponebatur non metiri.*

A, 6. B, 4. D - - - - C, 16.

PROPOS: XIX.

Problema 2.

Tribus numeris *a, b, c* datis; considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inveniri. (*Sive deinceps proportionales sint sive non*)

A,8. B,12. C,18. E,27. D,216.
A,4. B,8. C,9. E,18. D,72.

B multiplicans c *faciat* d. *Aut* a *metitur* d *per* e *quartum proportionalem.* α *Fit enim* d *ex* a
α 9. ax. *in* e, β *& ex* b *in* c. *Ideoq; cum sub extremis* a,
β per cōstr. e *comprehensus, æqualis sit ei, qui sub intermediis,*
γ 19. VII. γ *erit, ut* a *ad* b, *ita* c *ad* e.

A,4. B,6. C,9. E - - - D,54.
A,3. B,4. C,10. E - - - - D,40.

Aut a *non metiatur* d, *& tum nequit inveniri quartus proportionalis. Si tamen potest, sit* e. *Cum* 4 a, b, c, e *sint proportionales, extre-*
δ 7. ax. *mis* a, e *contentus, æqualis* β *erit contento intermediis* b, c, *hoc est,* d. *Cum itaq;* d *ex* a *in* e δ *fiat, metietur* a *ipsum* d *per* e, *quod est absurdum. Quia ponebatur non metiri.*

PRO-

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum *a,b,c*.

A 2. B 3. C 5.

D++++++++++++++++++++++++++++++

α Sumto minimo d, *quem* a, b, c *metiantur, apponatur ipsi unitas* e. *Si totus* d e *est primus, factum est, quod vult propositio, quia tum plures sunt primi* a, b, c, d, e. α. 38. VII.

A 3. B 5. C 7.

D, 105. E

G 53.

Si totus d e *sit non primus, β metietur ipsum* g, *qui nulli propositorum* a, b, c, *idem esse potest. Si* β 33. VII.
tamen sit, metietur etiam g *ipsum* d, *sicut eum metiuntur* a, b, c. *Ideoq;* g *metiens totum* d e, *& detractum* d, *γ metietur etiam reliquum* e *unitatem quod absurdum. Ergo* g *primus, idem non est,* γ 11. ax.

qui unus ipsorum a,b,c. *Sunt ergò* a,b,c,g *primi plures, quam* a,b,c. *Adeoq́; & in infinitum plures primi inveniri possunt.*

PROPOS: XXI.

Theorema 19.

Si pares numeri quotcunque ***a b***, ***b c***, ***c d*** componantur; totus par erit ***a d***,

A++++++ B++++C+++++++D

Cum enim quilibet par habeat partes duas æquales; si æqualibus addantur æquales, omnes dimidiæ dimidijs fiunt æquales. Quare totus a d *erit par, dimidiorum compositorum duplus ex definitione.*

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si impares numeri quotcunque ***a b***, ***b c***, ***cd***, ***d e*** componantur; multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit ***a e***.

A+++B+++++C+++++++D++++++++E.

Cum propositi numeri sint impares, quilibet differt unitate à pari, ex definitione. Singulis unita-

unitate detracta, quilibet reliquorum erit par. Quare & à reliquis compositus α *par erit. Sed unitatum detractarum multitudo est par. Ergo & totus* a e *par erit.* α 21. IX.

PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Si impares numeri quotcunque *ab, bc, ce*, componantur, multitudo autem ipsorum sit impar; & totus *ae* impar erit.

A + + + B + + + + + C + + + + + + D + E.

Ablata unitate d e *ex* ce, *erit* c d *par. Sed* ac *ex imparibus multitudine paribus est compositus. Ergò & par* α *erit, huic si addatur* c d *totus* ad *par* β *erit. Sed addita unitate* d e *numero* a d, *totus* ae *impar erit, quia par à pari differt per unitatem.* α 22. IX. β 21. IX.

PROPOS: XXIV.

Theorema 22.

Si à pari numero *a b* detrahatur par *c b*: & reliquus *a c* par erit.

A + D + + + + + C + + + + B

Si non detracta a d *unitate erit* d c *par. Ideoq; & compositus* db α *erit par: ac proinde cõposito* db *addita unitate* ad, *totus* ab *impar fiet. Quod est absurdum; quia ponitur par.* α 21. IX.

PRO.

PROPOS: XXV.

Theorema 23.

Si à pari numero *a b* impar *c b*, detrahatur; & reliquus *a c* impar erit.

A . . . . C . D . . . . B

Ex impari c b *ablata unitate* c d, *reliquus* d b *par erit. Quia ergò totus* a b *ponitur par ablato pari* db, *reliquus* a b *par* a *erit, ablataq; unitate* cd *reliquus* a c *impar erit.*

a 24.IX.

PROPOS: XXVI.

Theorema 24.

Si ab impari numero *a b* impar *cb* detrahatur: reliquus *a c* par erit.

A . . . . C . . . . . . D . B

Ex imparibus ab, cb *unitate* d b *detracta, reliqui* a d, c d *pares erunt. Ex pari* a d *ablato pari* cd, *reliquus* a c *par* a *erit.*

a 24.IX.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Si

Si ab impari numero *ab* par *cb* detrahatur; reliquus *ac* impar erit.

A . D . . . . C . . . . . . B

Ab impari a b *unitate* a d *sublata, erit reliquus* db *par* [a], *cui* d b *rursus auferatur* c b *par, reliquus* dc *par quoq;* [a] *erit: ac proinde unitate* a d *addita, fiet* a c *impar.* a 24. IX.

PROPOSITIO XXIIX.

Theorema 26.

Si impar *a* numerus parem *b*, multiplicans, fecerit aliquem *c*, factus par erit.

A . . . B . . . .

C . . . .

Cum c *fiat ex* a *in* b; *componetur* c *ex tot numeris ipsi* b *æqualibus, quot fuerint unitates in* a. *Est autem* b *par. Ergò &* c *ex tot* b *paribus compositus, quot in* a *sunt unitates, par quoque* [a] *erit.* a 21. IX.

PROPOS: XXIX.

Theorema 27.

Si impar numerus *a* imparem *b*

mul-

multiplicans fecerit aliquem *c*; factus *c* impar erit.

A . . . . B . . . . . .

C . . . .

Cum c *ex* a *in* b *fiat, componetur* c *ex tot numeris ipsi* b *aequalibus, quot in* a *fuerint unitates. Est autem* b *impar. Ergo & c ex tot impari-*
a 23. IX. *bus compositus, quot in* a *sunt unitates, impar quoque* a *erit. Hinc nascuntur duo Corollaria.*

Corollarium 1.

Par numerus in se multiplicatus, producit parem.

Corollarium 2.

Impar numerus in se multiplicatus producit imparem.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 28.

Si impar numerus *a* parem *b* metiatur, & illius *b* dimidium *d* metietur.

A . . . C . . . . E . .

B . . . .

D . . . . . .

Me-

Metiatur a *ipſum* b *per* c. *Erit utiq;* c *par Si enim eſſet impar, ſequeretur* a *imparem in* c *imparem* α *efficere imparem. Quod abſurdum, quia* b *ponitur par: Ergò & c erit par. Itaq; cum* a *per omnes* c *unitates efficiat totum* b*: Idem* a *per dimidium unitatum* c *ipſum* d *efficiet, ipſius* b *dimidium. Metietur ergò* a *ipſum* d *per dimidium unitatum* c*, id eſt,* e. α 29. IX.

PROPOS: XXXI.

Theorema 29.

Si impar numerus *a* ad aliquem numerum *b*, primus ſit: & ad illius duplum *c* primus erit.

A..... B........

C................

D - - -

Si a *non ſit primus ad* c, *metiatur eos* d, *qui omninò erit impar. Si enim eſſet* d *par, cum metiatur imparem,* a α *erit* a, *factus ex* d *pari, in eum numerum, per quem metitur, par; Quod abſurdum, quia ponebatur* a *impar.* d *ergò impar metiens* c *parem,* β *metietur quoq; dimidium numeri* c. *Idem autem* d *metitur &* a. *Ergò &* a, b *inter ſe primos metietur* d. *Quod abſurdum,* a *ergò ad* c *eſt primus.* α 28. IX. β 30. IX.

Hinc

Hinc patet Corollarium : Numerum imparem, qui ad numerum aliquem est primus, primum quoque esse, non solum ad duplum ejus (*ex 31. IX.*) sed etiam ad quadruplum, octuplum, & ita per proportionem duplam in infinitum excurrendo. *Quia semper sequentes præcedentium sunt dupli.*

PROPOS: XXXII.

Theorema 30.

Numerorum *a,c,d* à binario *a* duplorum, unusquisque est pariter par tantum.

1. Un. A,2.B,4.C,8.D,16.

a 11. IX. *Exposita enim unitate fiunt numeri ab unitate* a *deinceps proportionales: Quare a quemlibet* b,c,d, *& minor majorem per aliquem ipsorum* a,b,c,d *metietur; Qui cum omnes sint pares,* α *binarij nimirum dupli ipsorum quemlibet* a *metietur numerus par per parem. Erit ergò quilibet pariter par ex definitione. Sed quod sint pariter pares tantum ita ostenditur. Cum enim ab unitate sint continuè proportionales, & unitati proximus primus*

sit primus, utpote binarius, nullus præter ipsos a, b, c, d *quemlibet ipsorum* β *metietur. Quia cum omnes sint pares, quemlibet ipsorum par numerus per parem* γ *metietur.* β 13. IX. γ 15. IX.

Scholium.

Hinc deducitur Ars Arithmeticorum inveniēdi omnes numeros pariter pares. *Nulli enim præter duplos à binario* a, b, c, d, e, f, *&c. tales esse possunt.* δ 32. IX. *Si enim esset quispiam* g, *ejus* h *dimidium par esset; quia si impar esset,* g *esse* f *& pariter impar contra hypothesin; ipsius* h, *dimidiū sit* i, *qui ob eandem rationem par erit, & sic deinceps usq; ad unitatem. Cum ergo dimidium* i *sit unitas,* h, g *erunt dupli ab unitate atq; ita in ordine priorum contra hypothesin.*

A 4. B 4. C 16. D 32. E 64. F 128.

I--- H---- G------

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Si numerus *a* dimidium *b* habeat imparem: pariter impar est tantū.

A+++++++++++

B+++++C++

D----E---

Cum a *habeat dimidium* b *imparem, metietur binarius* c *par numerus ipsum* a *per* b. a *itaq;*

S *ex de-*

ex definitione erit pariter impar. Quod si tamen esse talis negetur, erit quoq; pariter par. Ideoq; ipsū aliquis par per d parem c α metitur, & ex d secun-
α 9. ax. *do in tertium e fiet a qui ex c primo in b quartum*
β 19. VII. β *eritq;, ut c ad d, ita e ad b. Metitur autem c parem d. Ergò & e par metitur ipsum b imparem. Quod absurdum.*

Scholium.

Imparium omnium dupli omnes
β 33. IX.
δ 34. IX. sunt γ pariter impares δ tantùm.

PROPOS: XXXIV.

Theorema 32.

Si par α numerus neq; à binario duplus sit, neq; dimidiū habeat imparē; pariter par est, & pariter impar.

A + + + + + + + + + + + +

Cum enim dimidium habeat parem per eum metietur ipsum binarius par, & sic pariter par est. Sed & pariter impar. Diviso enim a bifariā, ejusq; dimidio rursus bifariam & sic deinceps, tandem in imparem aliquem incidemus. Si enim ultimò oc-
α 32. IX. *curreret binarius α esset a duplus à binario, quod contra hypothesin. Cum ergò occurrat impar, ille metietur a per parē, non per imparem, β quia im-*
β 29. IX. *par multiplicans imparem, produceret imparem a; Contra hypothesin. Est itaq; & pariter impar.*

Scholium.

Omnes, relictis duplis à binario, & qui dimidios habent impares, pa-

res

res; reliqui & pariter pares & pariter impares sunt.

PROPOS: XXXV.

Theorema 33.

Si sint quotcunque numeri *a*, *b c*, *d*, *e f*, deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo *b c*, & ultimo *e f* *g c*, *h f*, æquales ipsi primo *a*: Erit ut secundi excessus *b g*, ad primũ *a*, ita ultimi excessus *e h* ad omnes, *a*, *b c*, *d*, ipsum antecedentes.

A+++++++++

B++++ G++++++++ C

D++++++++++++++++++

E++++++++++ K++++++ I++++ H++++++++ F

Ab e f *detrahantur* f i, *&* f k *ipsis* b c *&* d *æquales. Quoniam* f i *est æqualis* b c *&* *ablatus* f h *ablato* g c, *etiam reliquus* h i, *reliquio* g b *æqualis erit. Sed quia est, ut* a *ad* b c, *ita* b c *ad* d, *&* d *ad* e f; *convertendoq́ ut* e f *ad* d, *ita* d *ad* bc, *&* b c *ad* a: *estq́;* k f *ipsi* d *&* i f *ipsi* b c, *&* h f *ipsi* a *æqualis*; *erit etiam ut* e f *ad* k f, *ita* k f *ad* i f *&* i f *ad* h f. *Igitur dividendo ut* e k *ad* k f, *ita* k i *ad* i f, *&* i h *ad* h, *ac proinde ita etiam* a *erunt* a. 12. VII. *omnes* e k, k i, ih *ad omnes* kf, if, h f, *id est, totus* e h *ad* d, bc, a *simul* (*quibus* kf, if, hf, *sumti sunt æquales*) *ut* i h *ad* hf, *hoc est, ut* b g *ad* a, *qui illis sunt æquales.*

 Scholium.

Scholium.

Per hoc theorema summam continuè proportionalium ex primo, secundo & ultimo terminis datis invenire licet.

PROPOS: XXXVI.

Theorema 34.

Si ab unitate quotcunque *a,b,c,d* numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus *e*; & totus *e* hic in ultimum *d* multiplicatus faciat aliquem *f*, Factus erit perfectus.

1. Vn. A,2. B,4. C,8. D,16.
E,31. G---62. H,124. I,248. F----496.
K,31. M,31. L,31. N,465.
O----P----

Sumantur ab e *tot dupli; quot sunt* a, b, c, d *videlicet* e, g, h, i: a *erit ex æquo ut* a *ad* d, *ita* e *ad*
a 14. VII. i, *factusq; ex* a, *in* i b *æqualis est facto ex* d *in* e.
b 19. VII. *Sed* f *est factus ex* d *in* e. *Idem ergò* f *ex* a *in* i *fit. Itaq;* i *metitur* f *per* a *binarium, & ita* f *ipsius*

i est

i est duplus. Quare e,g,h,i,f, deinceps sunt du-
pli. Ex secundo g & ultimo f detrahantur æqua-
les ipsi e, qui sint k,l, relictis m,n excessibus; ν E-
rit ut m ad e; ita n ad omnes antecedentes e, g,
h,i simul. Sed m est æqualis ipsi e, dimidius vi-
delicet dupli g. Ergò & n æqualis ipsis e,g,h,i ν 35.IX.
simul. At unitas & a,b,c,d æquales sunt l, l ipsi e
& k æqualis. Itaq; totus l,n, id est, f æqualis erit
unitati & numeris a,b,c,d,e,g,h,i simul. Qua-
re cum unitas & a,b,c,d,e,g,h,i metiantur i-
psum f (Quia enim f ex e in d est factus, ξ metie-
tur d ipsum f e eundemq; f unitas & a,b,c,d, ξ 7.IX.
qui ipsum d metiuntur. Rursus cum i metiatur i ο 11.IX.
psum f, eundem f π metientur e,g,h, ~~per~~ qui ipsum l π 11.ax.
metiuntur (ob proportionem duplam) nec alius ul-
lus metiatur ipsum f. Erunt ergò unitas & nu-
meri a,b,c,d,e,g,h,i omnes partes quas f habere
potest; quibus simul sumtis æqualis cum sit f, erit f
perfectus ex definitione. Si alius quidam nume-
rus potest metiri ipsum f, esto o per p, ex quibus
η fiat idem f, qui ex e in d. Cum ergò ex e pri-
mo in d quartum fiat idem numerus, qui ex p se- η 9.ax.
cundo in o tertium. Ergò ut e ad p, ita o ad
d. Cum autem a,b,c,d sint proportionales ab
unitate, & a primus, nullus præter illos θ meti-
tur d, Ergo nec o alius ab ipsis a,b,c positus; &
cum sit e ad p, ut o ad d, neq; e ipsum p me- θ 13.IX.
tietur, qui, cum e sit primus, κ inter se sunt primi, κ 31.VII.

Scholium.

Per hoc theorema ſummam continuè proportionalium ex primo, ſecundo & ultimo terminis datis invenire licet.

PROPOS: XXXVI.

Theorema 34.

Si ab unitate quotcunque *a, b, c, d* numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus *e*; & totus *e* hic in ultimum *d* multiplicatus faciat aliquem *f*, Factus erit perfectus.

1. *Vn.* A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G - - - 62. H, 124. I, 248. F - - - - 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O - - - - P - - - -

Sumantur ab e *tot dupli; quot ſunt* a, b, c, d *videlicet* e, g, h, i: a *erit ex æquo ut* a *ad* d, *ita* e *ad*
a 14. VII. i, *factusq; ex* a, *in* i b *æqualis eſt facto ex* d *in* e.
b 19. VII. *Sed* f *eſt factus ex* d *in* e. *Idem ergò* f *ex* a *in* i *fit. Itaq;* i *metitur* f *per* a *binarium, & ita* f *ipſius*

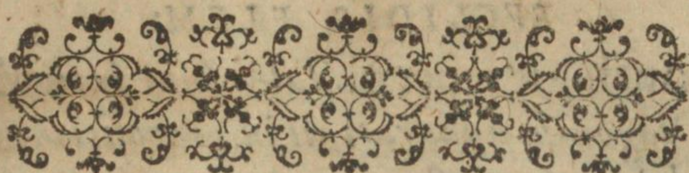
i *eſt*

i est duplus. Quare e,g,h,i,f, deinceps sunt dupli. Ex secundo g & ultimo f detrahantur æquales ipsi e, qui sint k,l, relictis m,n excessibus; ν Erit ut m ad e; ita n ad omnes antecedentes e, g, h,i simul. Sed m est æqualis ipsi e, dimidius videlicet dupli g. Ergò & n æqualis ipsis e,g,h,i ν35.IX.
simul. At unitas & a,b,c,d æquales sunt l, l ipsi e & k æqualis. Itaq; totus l,n, id est, f æqualis erit unitati & numeris a,b,c,d,e,g,h,i simul. Quare cum unitas & a,b,c, d, e, g, h, i metiantur ipsum f (Quia enim f ex e in d est factus, ∂ metietur d ipsum f e eundemq; f unitas & a, b, c, d, ∂ 7.IX.
qui ipsum d metiuntur. Rursus cum i metiatur i ι 11.IX.
psum f, eundem f ζ metientur e,g, h, ~~per~~ qui ipsum l ζ 11.ax.
metiuntur ι ob proportionem duplam) nec alius ullus metiatur ipsum f. Erunt ergò unitas & numeri a,b,c,d,e,g,h,i omnes partes quas f habere potest; quibus simul sumtis æqualis cum sit f, erit f perfectus ex definitione. Si alius quidam numerus potest metiri ipsum f, esto o per p, ex quibus η fiat idem f, qui ex e in d. Cum ergò ex e primo in d quartum fiat idem numerus, qui ex p secundo in o tertium. Ergò ut e ad p, ita o ad η 9.ax.
d. Cum autem a,b,c,d sint proportionales ab unitate, & a primus, nullus præter illos θ metitur d, Ergo nec o alius ab ipsis a,b,c positus; & cum sit e ad p, ut o ad d, neq; e ipsum p me- θ 13.IX.
tietur, qui, cum e sit primus, κ inter se sunt primi, κ 31.VII.

& in sua ratione λ minimi, & o ipsum e æquè ac
λ 23 VII. p ipsum d μ metiantur. Ergò cum d nullus præter
μ 21. VII. a b c, metiatur, p erit illorum aliquis. Sit idem
qui b, & quot b, c, d, totidem e, g, h, sumantur,
α eritq; ut b ad d ita e ad h, & idem numerus fi-
et ex b in h, qui ex d in e, idest, qui ex o in p.
Itaq; ut p ad b ita h ad o. Sed p est idem qui b.
Ergò & o idem qui h. Quod absurdum.
Ponebatur enim alius.







EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER X.

Definitiones.

I.



Ommensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadē mensura metitur. *Ita etiam 21 & 13 palmorū lineæ sunt commens. quia & unus palmus & dimidius & $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsas metitur. Idem & de superficiebus, quas superficies eadem, & corporibus, quæ corpus idem metitur, intelligitur.*

2. Incommensurabiles autem, quarum nullā communem mensuram

contingit reperiri. *Tales sunt latus & Diagonius quadrati, ut in propositione ultima demonstratur, & multæ aliæ lineæ de quibus in propositionibus. Itemq; & superficies & corpora.*

3. Rectæ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spacium metitur. *Antea lineæ commensurabiles longitudine sunt in 1. definitione explicatæ: hîc verò longitudine aliàs incommensurabiles insuper intelliguntur, quarum quadrata per superficiem communẽ commensurabilia. Quæ quadrata in 47. I. appellãtur potentia laterum vel linearum. Tales lineæ etiam sunt omnes longitudine commensurabiles non contra.*

4. Incommensurabiles autem potentia, cum quadratis earum nullum spacium quod sit communis illorum mensura, contingit reperiri. *Intelligit eas, quæ neq; mensuram communem, quoad longitudinem, neq; quoad quadrata habent.*

5. His positis, ostenditur, cuicun-

que

que rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia, alias verò potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis. *Dicit ad datam rectam alias infinitas & commensurabiles tum longitudine, tum potentia, & incommensurabiles posse inveniri, eamque cujus respectu reliqui tales sunt dici* ῥητὴν, *Rationalem, quod semper ponatur certa & nota, reliquis utplurimum ignoratis.*

6. Et huic commensurabiles sive longitudine & potentia, sive potētia tantùm Rationales. *Omnes lineæ quæ datæ quomodocunque sunt commensurabiles dicuntur Rationales, non quidem positione, ut illa, sed quia in illa comparatione cum data commensurabiles inveniuntur. Ideoque & lineas quarum quadrata 20 & 1000 sunt cuilibet quadrato, ut 16 vel 100 commensurabiles, rectè etiam rationales appellámus.*

7. Huic verò incommensurabiles,

Irrationales vocentur. *Itidem hîc ex adversò omnibus modis incommensurabiles ostendit, quas nec in longitudine neq; in potestate exactus aliquis numerus exprimit.*

8. Et Quadratum, quod à proposita dicta recta fit, dicatur Rationale. *Nonsecus enim, ac linea illa certa & nota dicebatur rationalis, etiam quadratum ex ea factum Rationale est dicendum.*

9. Et huic commensurabilia quidem, Rationalia. *Ita & omnes superficies planæ, Quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales sunt dicendæ non positione sed collatione.*

10. Huic verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur. *Etiam superficies quæcunq; irrationales dicuntur, quarum lineæ sunt incommensurabiles rationali lineæ.*

11. Et rectæ, quæ ipsa possunt, irrationales. *Si nimirum sunt quadrata ipsa, intelliguntur hic latera per lineas; si verò sint alia quæpiam recti linea, re-*

ctæ

ctæ, describentes æqualia quadrata spaciis incommensurabilibus.

POSTULATUM.

Quælibet magnitudo toties potest multiplicari, donec quamlibet magnitudinem ejusdem generis excedat.

AXIOMATA.

1. Magnitudo quotcunq; magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.
2. Magnitudo quamcunq; magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.
3. Magnitudo metiens magnitudinem totam & ablatam, metitur & reliquam.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Duabus magnitudinibus *ab*, *c*, inæqualib. propositis, si à majore *ab* auferatur majus *a h* quã dimidiũ; & ab eo, quod

quod reliquũ *h b* est, rursus detrahatur majus *h i*, quàm dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, *i b*, quæ minor erit proposita minore magnitudine. c.

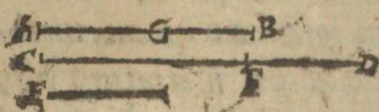
Sumatur ipsius c *multiplex* d e *proximè major quàm* a *b, in partes ipsi* c *æquales divisa; quibus partibus multitudine æquales sint partes* a h, h i, i b, *in linea* a b. *Cum ergo* d e *sit major quàm* a b, *& ex* d e *minus dimidio* d g (*vel etiam dimidium, si* d e *esset dupla ipsius*) *ex* a b *verò plus dimidio* a h *sit ablatum, erit reliquum* g e *reliquo* h b *majus. Rursus, cum* h b, *quam* g e *sit minor; & ex* g e *ablatum sit dimidium* f g (*vel minus dimidio*) *ex* h b *verò majus dimidio* h i *erit reliquum* fe *id est* c *reliquo* i b *majus. Quod erat propositum.*

PROPOS: II.

Theorema 2.

Si duabus magnitudinibus *a b*, *c d* inæqualibus propositis, detrahatur semper minor *a b* de majore *c d*, alterna quadam detractione, & reliqua

reliqua *fd* minimè præcedentem *ab* metiatur: incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines *ab*, *cd*.



Sin minus, esto cõmunis mensor e, *qui vel æqualis est ipsi* a b *vel minor. Facta ergò detractione* a b *ex* c d *quoties potest,* α *relinquat* f d, *se minorem, & detracta* f d *ex* a b *relinquat se minorem* g b *&c. adeoq; relinquetur tandem vel ex* c d *vel* a b *quædam ut* g b *minor ipsa* e: *Quoniam itaq;* e *metitur ipsam* a b, *&* a b *ipsam* c f, *etiam* e β *metietur, ipsam* c f, *cumq;* e *metiatur etiam* c d, γ *metietur totam etiam reliquam* f d. *Sed* f d *metitur ipsam* a g β *ergò &* e *metitur ipsam* a g, *cumq; & metiatur* a b, γ *metietur etiam reliquam* g b, *major minorem. Quod absurdum.*

α 1. X.
β 2. ax.
γ 3. ax.

PROPOSITIO III.

Problema 1.

Duabus *ab*, *cd* magnitudinibus commensurabilibus datis; maximam earum communem mensuram *fb* invenire.



Facta detractione alterna, metietur tandem f b *ipsam* c d, *nisi datas duas*

α 2. X. *duas* a b, c d *α voluerimus esse incommensurabiles, eritq; f b maxima communis mensura. Cum enim*
β 1. ax. f b *metiatur* e d, ed *verò ipsam* a f, *etiam* f b β *metietur* f a, *& quia metitur seipsam, γ etiam totam* a b; *& ita etiam ipsam* c e *quam meti-*
γ. 1. ax. *tur* a b; *adeoq; cum & c e & e d metiatur* f b, γ *metiatur totum* c d, *eritq; utriusq;* a b *&* c d *mensura communis. Si quis verò etiam neget eam esse maximam, major sit* g, *quæ &* a b *&* c d *metietur, & β ipsam* c e, *quam metitur,* a b; *Cumq; metietur &* c d *&* c e, *etiam δ metietur* e d *reliquam; quæ cum metiatur* a f, *eandem* a f β *metietur etiam* g: *sed cum &* a b *&* a f *metiatur*
δ 3. ax. *δ metietur etiam* f b *reliquam, major minorem. Quod absurdum.*

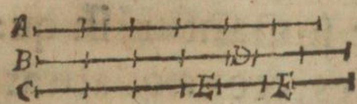
Hinc patet Corollarium.

Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

PROPOSITIO IV.
Problema 2.

Tribus magnitudinibus *a*, *b*, *c*, commēsurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

Esto



Esto d *communis men-* α. 3. X.
sura a *&* b; *quæ si &*
metitur c, α *habetur* β cor. 3. X.
propositum. Si enim major quædam quàm d *etiam communis mensura,* β *metietur &* d *cõmunem mensuram* a *&* b *major minorem. Si autem* d *non metiatur* c, *erunt saltem commensurabiles: Cum enim* a, b, c *sint commensurabiles, quælibet earum communis mensura, maximam mensuram* d *ipsarum* a *&* b β *metietur.* α *Sit itaq; communis* e *inter* c *&* d *quæ erit maxima trium* a, b, c *communis mensura. Sin minus, major quàm* e *sit* f. *Quia ergò* f *metitur* a *&* b, *metietur etiam* d. *Cumq; metiatur etiam* c *&* d, β *metietur communem earum mensuram.* e, *major minorem. Quod absurdum.*

Hinc manifesta sunt Corollaria.

1. Magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoq; maximam earum communem mensuram.

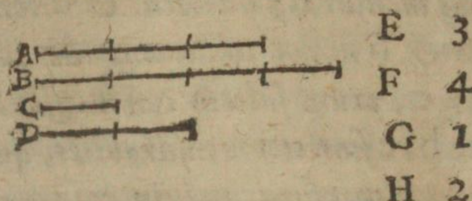
2. Pluribus quam tribus magnitudinibus datis, illarum communis maxima mensura inveniri potest. *Si enim sunt 4, invenitur prius trium.*

LEMMA.

Si sint quotcũq; magnitudines, *a, b, c, d*, & totidẽ etiã numeri, *efgh*, qui bini

in

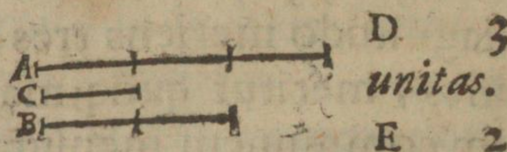
in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines; & ex æqualitate in eadem ratione erunt, *A ad D* magnitudines & numeri *e ad h*.



Demonſtratio eſt ex V. & VII. manifeſta.

PROPOS: V.
Theorema 3.

Commenſurabiles *a b* magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.



α 3. X. *α Sit* c *earum menſura communis maxima, quæ quoties metitur* a *&* b, *toties unitas metiatur* d *&* e *numeros. Cum igitur magnitudo* c *metiatur magnitudinem* a *quoties unitas numerum* d, *erit ut* c *ad* a *ita unitas ad* d: *ſed ut eſt* c

β Lemm. X. *ad* b *ita eſt unitas ad* e, *β Ergò ex æquo ut magnitudo* a *ad magnitudinem* b *ita numerus* d *ad numerum* e.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Theorema 4.

Si duæ magnitudines *a*, *b*, proportionem habeant, quam numerus *d* ad numerum *e*; commensurabiles erunt *a*, *b*, magnitudines.

D 4 E 3 *unitas.*



Quot unitates sunt in d, *in tot partes æquales ipsi* c *sit divisa* a *magnitudo. Cum ergò sit ut* c *ad* a *ita unitas ad* d, *quia æquè metiuntur* c *ipsam* a *& unitas ipsum* d; *cumq; ponatur ut* a *ad* b, *ita* d *ad* e, α *erit ex æquo ut* c *ad* b *ita unitas ad* e. *Sed unitas metitur numerum* e. *Igitur &* c *metitur magnitudinem* b. *Sed &* c *metitur ipsum* a. *Ergò* a *&* b *eandem communem mensuram* c *habent, &* β *sunt commensurabiles.* α Lemma 4. X. β 1. def. X.

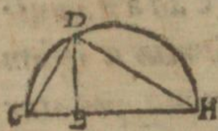
Corollarium.

Si fuerint duo numeri & recta, dari potest alia recta, ad quam prior recta rationem habeat, quam numerus ad numerum. Si enim data, recta secetur in tot partes æquales, quot

unitates continet alteruter numerorum; assumaturq; earundem partium alia, quot unitates continet alter numerus habetur propositum.

LEMMA.

Duobus numeris datis *c* & *e*, & linea recta *h b*, oportet efficere ut numerus *c* ad numerũ *e*, sic quadratum lineæ *h b* datæ ad quadratum alterius *b d*.



α13. VI. *Reperiatur* b g, *quæ sit ad* h b *ut* e *ad* c: α *sitq; inter* h b *&* b g *media proportionalis* b d. *Cum er-* C 5. E 2. *gò sit ut* c *ad* e, *ita* h b *ad* b g; *sed*

β.20. VI. *ut* h b *ad* b g, β *ita quadratum ex* h b *ad quadratum ex* b d. *Itaq; ut* c *ad* e, *ita quadratum ex* h b *ad quadratum ex* b d.

PROPOS: VII.

Theorema 5.

Incommensurabiles magnitudines *a*, *b* inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

α6, X. *Si haberent* α *essent commensurabiles. Quod est contra hypothesin.*

PRO-

PROPOS: IIX.

Theorema 6.

Si duæ magnitudines *a b* proportionem non habeant, quam numerus ad numerũ: Incommensurabiles erunt magnitudines. (*longitud. scil.*) a 5. X.

Si enim commensurabiles acciperentur, a esset earum proportio, quæ numeri ad numerum, contra hypothesin.

A B

LEMMA.

Si sint tres quantitates *a,b,c,* continuè proportionales, & aliæ tres *d e f* continuè quoque proportionales; sitq; ut prima illarum *a,* ad tertiam *c,* ita prima *d* harũ ad tertiam *f*; erit & ut prima *a* illarum ad secundam *b*; ita prima harum ad *d* secundam *e.*

D 29 E 42 F 36

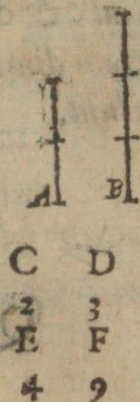
Cum enim rationes a *ad* c *&* d *ad* f *duplicatæ sint eædem, etiam dimidiæ* a *ad* b, *&* d *ad* e *eædem erunt.*

PROPOS: IX.

Theorema 7.

Quæ à rectis lineis *a*,*b*,longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se rationem habent,quam quadratus numerus *e* ad quadratum *f* numerum: Et quadrata ex *a* & *b* inter se proportionem habentia,quam qudratus numerus *e* ad quadratum numerum *f*; & latera *a b* habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis *a b* longitudine commensurabilibus fiunt quadrata;inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus *e* ad quadratum numerum *f*: & quadrata ex *a* & *b* inter se proportionem nō habentia, quam quadratus numerus *e* ad quadratum numerum f;neq; latera *a* & *b* habebunt longitudine commensurabilia.

25. X.



Cum rectæ a, b *sint commensurabiles longit.* α *erunt ut numerus ad numerum. Sit autem* a *ad* b *ut* c *numerus ad numerum* d, *quarũ quadrati sint* e *&* f. *Quoniam ergò* a *ad* b *est ut* c *ad* d; *quadratum autem ex* a *ad quadratum*

dratum ex b β *habet duplicatam ratione laterum,* β 20. VI.
γ *sicut & numerus quadratus* e *ad numerum quadratum* f *laterum* c *&* d, *erit eadem proportio quadratorum ex* a *&* b, *quæ est numerorum quadratorum* e *&* f.

Deinde sit quadratum ex a *ad quadratum ex* b *ut numerus quadratus* e *ad numerum quadratum* f, *erunt rectæ* a *&* b *longitudine commensurabiles. Cum enim rationes eadem quadratorũ ex rectis* a *&* b, *& numerorum quadratorum* e f β *&* γ *sint duplicatæ suorum laterum* a b *&* c, d, *erit,* γ 11. IIX.
ut numerus a *ad numerum* d, *ita recta* a *ad rectam* b, δ *eruntq;* a, b, *commensurabiles.* δ 6. X.

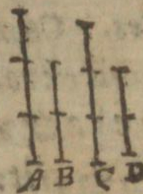
Tertiò sint a b *incommensurabiles, etiam quadrata ex ipsis non erunt ut numerus quadratus ad numerum quadratum; quia ita forent* a, b, *commensurabiles contra hypothesin. Deniq; quadratum ex* a *non habeat rationem ad quadratum ex* b, *quam numerus quadratus ad quadratum, erunt etiam longitudine incommensurabiles* a *&* b; *si enim essent commensurabiles, etiam quadrata ex ipsis essent ut numerus quadratus, ad quadratum, contra hypothesin.*

PROPOS: X.

Theorema 8.

Si quatuor *a b c d* magnitudines

proportionales fuerint, prima *a* verò secundæ *b* fuerit commensurabilis; & tertia *c* quartæ *d* commensurabilis erit. Et si prima *a* secundæ *b* fuerit incommensurabilis, & tertia *c*, quartæ *d* incommensurabilis erit.



Cum enim a *&* b *sint commensu-*
α 5. X. *rabiles,* α *habebunt rationem nume-*
rorum, e *ad* f: *Est verò etiam* c *ad* d
ut a *ad* b, *ergo etiã* c *ad* d *est ut* e *ad*
β 6. X. f. β *Sunt ergò inter se cõmensurabiles.*
γ 7. X. EF *Contra si* a *&* b *sint incommen-*
32 *surabiles, etiam* γ *non sunt ut nume-*
rus ad numerum Ideoq́; nec c *ad* d, *quæ ponuntur ut* a *ad* b, *erunt ut numerus ad numerum, adeoque etiam* c *&* d *incommensurabiles erunt.*

LEMMA.

Duos numeros planos invenire, qui proportionem non habeant, quã Quadratus numerus ad Quadratum numerum.

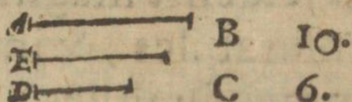
α 26. IIX. *Inventi plani non similes, omnes non* α *habent rationem quam quadratus ad quadratum. Suntq́;*

tales

tales numeri primi omnes, & quorum unus quadratus, alter non. &c.

PROPOSITIO XI.
Problema 3.

Propositæ rectæ lineæ *a* invenire duas rectas lineas *d e* incommensurabiles, alteram *d* quidem longitudine tantùm, alteram *e* verò etiam potentia.



α Assumtis numeris b c, *β investigetur recta* d, *ad cujus quadratum sit quadratum rectæ* a, *ut* b *ad* c, *erit* d *ipsi* a *longitudine tantùm incommensurabilis. Quia enim quadratum ex* a *ad quadratum ex* d *est, ut numerus* b, *ad numerum* c, *sed* b *&* c *non sunt quadrati: Ergò quadratum ex* a *ad quadratum ex* d *non erit ut numerus quadratus ad numerum quadratum: γ Ideoq;* a *&* d *sunt rectæ longitudine incommensurabiles; & longitudine quidem tantùm Cum n. quadrata earum habeant proportionem numerorum* b *ad* c, *δ erunt commensurabilia. Deinde inter rectas* a *&* d *longitudine tantùm incommensurabiles*

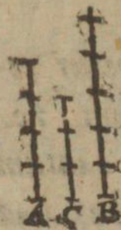
α per lemma 10. X.
β per lemma 6. X.
γ 9. X.
δ 6. X.

ε 13.VI. ε *inveniatur media proportionalis* e, *quæ & longitudine & potentia incommensurabilis erit ipsi* a. *Quia enim quadratum ex* a, *ad quadratum ex* e *est, ut* a *ad* d: *sed* a *ipsi* d *est longitudine incom-*
ζ 10.X. *mensurabilis;* ζ *erit ergò quadratum ex* a *quadrato ex* e *incommensurabile, & ita rectæ* a e *etiam potentia incommensurabiles.*

PROPOSITIO XII.

Theorema 9.

Quæ *a*, *b*, eidem *c* magnitudini sunt commensurabiles, & inter se *a & b* sunt commensurabiles.



α 5.X. *Cum enim* a, c *sint commensurabiles,* α *habent rationum numerorũ* d, e,
β 4.IIX. *sicut &* c b *numerorum* f, g. β *Assumtis autẽ* h, i, k, *tribus numeris minimis in rationibus datis* d *ad* e, *&* f *ad* g; *erit* h *ad* i, *ut* d *ad* e, *id est,* a *ad* c; *&* i *ad* k, *ut* f *ad* g, *id est* c *ad* b. *Itaque ex æquo erit* a *ad* b, *ut* h *ad* k.
γ 6.X. *id est, ut numerus ad numerum, & ita* γ *commensurabiles.*

D 10 E 8
F 2 G 3
H 5. I 4. K 6

PROPOS: XIII.

Theorema 10.

Si

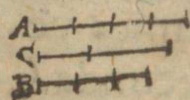
Si sint duæ magnitudines *a b*, & altera *a* quidem eidem *c* sit commensurabilis, altera *b* verò incommensurabilis: incommensurabiles erunt magnitudines *a b*.

Sin minus, & eidem a *sit commensurabilis* b, *α erunt etiam* b *&* c *commensurabiles, contra hypothesin.* α 12. X.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 11.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera *a* autem ipsarum magnitudini cuipiam *c* incommensurabilis fuerit: & reliqua *b* eidem *c* incommensurabilis erit.



Sin minus, cum a *ipsi* b *sit commensurabilis, α erunt etiam* a *&* c *commensurabiles, contra hypothesin.* α. 12. X.

Scholium.

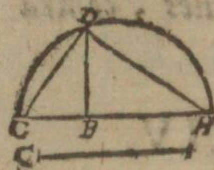
Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

LEMMA.

Duabus datis rectis inæqualibus *hg* & *c*; invenire id, quo major *hg* plus poteſt quàm minor *c*.

Deſcripto ſemicirculo ſuper h g

a 1. IV. *a aptetur* h d *æqualis ipſi* c, *junctis* d g; *plus poterit recta* h g *quàm* h d *vel* c *quadrato rectæ* d g.



β 31. III. *Cum enim* h d g *angulus* β *ſit rectus*

γ 47. I. *ctus erit quadratum ex* h g *æquale* γ *quadratis ex* d h. & d g. *Atq; ſit* h g *recta plus poteſt quàm* c *quadrato* d g.

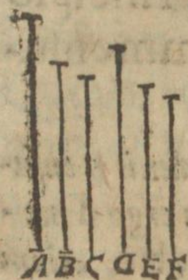
PROPOSITIO XV.

Theorema 12.

Si quatuor *a*, *b*, *d*, *e*, rectæ lineæ proportionales fuerint, prima *a* verò tantò plus poſſit, quàm ſecunda *b*, quantum eſt Quadratum rectæ lineæ *c*, ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia *d* tantò plus poterit, quàm quarta *e*, quantum eſt quadratum rectæ *f*, lineæ ſibi cõmenſurabilis lõgitudine: Quod ſi prima *a* tanto plus

poſ-

posſit quàm ſecunda *b*, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: Et tertia *d* tantò plus poterit, quàm quarta *e*, quantum eſt quadratum rectæ lineæ *f* ſibi longitudine incommenſurabilis.



Cum ſit ut a *ad* b, *ita* d *ad* e, α *erunt etiam ex illis rectis deſcrita quadrata ut rectæ; ſed quadratum ex* a *eſt* β *æquale quadratis ex* b c, *& quadratum ex* d *quadratis ex* e, f. *Ergò erit ut quadrata ex* b, c *ad quadratum ex* b; *ita quadrata ex* e f, *ad quadratum ex* e: *Et dividendo, ut quadratum ex* c *ad quadratum ex* b; *ita quadratum ex* f *ad quadratum ex* e. *Ergò ut recta* c *ad rectam* b; *ita recta* f *ad rectam* e. *Et convertendo ut* b *ad* c, *ita* e *ad* f. *Cùm autem ſit ut* a *ad* b, *ita* d *ad* e, *& ut* b *ad* c, *ita* e *ad* f, *erit etiam ex æquo, ut* a *ad* c, *ita* d *ad* f. γ *Quare* a *ſi fuerit longitudine commenſurabilis ipſi* c, *etiam* d *ipſi* f *commenſurabilis longitudine erit, & ſi incommenſurabilis, incommenſurabilis.*

α 22. VI.

β ex hypotheſi.

γ 10. X.

PRO-

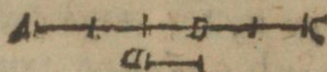
PROPOS: XVI.

Theorema 13.

Si duæ magnitudines *a b*, *b c* commensurabiles componantur; & tota magnitudo *a c* utriq; ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo *a c*, uni *a b* ipsarū commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines *a b* & *b c* commensurabiles erunt.

α 3. X.

β 3. ax.



α *Sit communis mensura* d. *Cum ergò* d *metiatur* a b, b c, *etiam* a c *totā* β *metietur, eruntq;* a c *&* a b *commensurabiles propter communem mensuram* d; *sicut &* a c *&* b c; *eaq; propter utriq;* a b *&* b c *commensurabilis est* a c. *Deinde sit tota* a c *alteri; ex quibus cōposita est ut* a b *commensurabilis, erunt* a b *&* b c *commensurabiles. Assumta enim communi mensura* d, *erit eadem* d *reliquæ* b c *mensura. Ideoq; commensurabiles sunt* a b, b c *propter communem mensuram* d.

Corollarium.

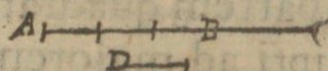
Si tota magnitudo *a c* ex duabus *a b*, *b c*, composita, commensurabilis fuerit

fuerit alteri *a b* ipsarum, eadem *a c* & reliquæ *b c* commensurabilis erit.

PROPOS: XVII.

Theorema 14.

Si duæ magnitudines *a b*, *b c* incommensurabiles componantur, & tota magnitudo *a c* utriq; *a b*, & *b c* ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo *a c* uni ipsarum *a b* incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudinem *a b*, & *b c* incommensurabiles erunt.



Si non utriq; tantùm alteri, ut a b, *sit commensurabilis, habens* d *mensuram communem. Itaq;* d *metiens totam* a c, *& ablatam* a b, *etiam* α *metietur reliquam* b c, *& commensurabiles erunt* a b, b c, *contra hypothesin. Deinde tota* a c *uni ipsarum* a b *incommensurabilis existens, etiam alteri* b c *incommensurabilis erit. Si non, etiam contra hypothesin ipsi* a b *commensurabilis* β *foret.*

α 3. AX.

β 16. X.

Corollarium.

Si tota magnitudo ex duabus

compo-

composita, incommensurabilis sit alteri illarum, eadem & reliquæ incommensurabilis est.

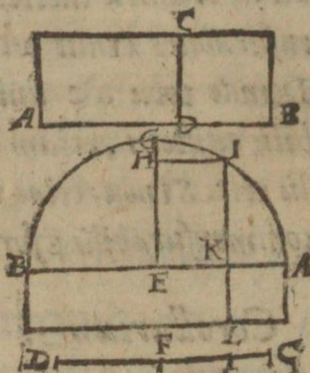
LEMMA I.

Si ad aliquam rectam *ab* applicetur parallelogrammum *ac*, deficiens quadrata figura *bc*; parallelogrammum *ac* applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis *ad*, *db*, vel *dc*, rectæ *ab*, ex applicatione factis continetur.

Quod patet ex 28. VI.

LEMMA 2.

Duabus datis rectis *ab*, *cd*, inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore *cd* descripti ad majorem *ab* applicare, ita ut deficiat figura quadrata *la*.



Super a b *describatur quadratus, sitq; e g radius ad* b *perpendicularis. Secta* c d *bifariam in* f, *sumatur* e h *aequalis* c f *rectae; & h puncto agatur* h i *parallela ipsi* a e, *& i puncto* i k l *parallela ipsi* g e, *sumtaque* k l *aequali ipsi* a k, *perficiatur* l b *rectangulum, &* l a *quadratum. Dico* l b *rectangulum quartae parti quadrati ex* c d *esse aequale, applicatum ad rectam* a b, *deficiens figura quadrata* l a. *Quoniam* k i α *media proportionalis est inter* a k, k b *erit rectangulum* a k b *quadrato* k i *aequale, id est,* β *quadrato ex* β e h *vel* c f, γ *quod quarta pars est quadrati ex* c d.

α 13. VI.
β 34. I.
γ 4. II.

LEMMA 3.

Si sint duae rectae *a b, c d*, inaequales, & ad majorem *a b* applicetur quarta pars *l b* Quadrati, ex minore *c d* descripti, deficiēs figura quadrata *l a*, non erunt segmenta *a k, k b*, quae ex applicatione sunt, aequalia.

Si aequalia sunt segmenta a k, k b α *siquidem parallelogrammum applicatū ad* a b *deficiens figura quadrata ex* a k *descripta, aequale est rectangulo* a k b: *Est verò sub aequalibus* a k, k b *quadratum: erit parallelogrammum dictum*

α per Lemma 17. X.

dictum quadratum ex bk, *dimidio ipsius* ab *descriptum, & quadratum ex* ab *quadruplum ipsius parallelogrammi. Cum autem ex hypothesi quadratum ex* cd *ejusdem parallelogrammi applicati sit quadruplum, nempe quartæ partis quadrati ex* cd. *Igitur quadrata rectarum* ab, cd *sunt æqualia, ipsæq; rectæ contra hypothesin æquales.*

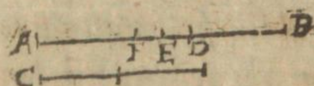
PROPOSITIO XIIX.

Theorema 15.

Si fuerint duæ rectæ lineæ *ab* & *c* inæquales, quartæ autem parti Quadrati, quod fit à minori *c* æquale parallelogrammum ad majorem *ab* a applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes *ab*, *db* longitudine commensurabiles ipsam dividat; major *ab* tantò plus poterit, quàm minor *c*, quantum est quadratum rectæ lineæ *fd* sibi longitudine commensurabilis. Quod si major *ab* tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ *fd* sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati,

a 2. Lem. 17. X.

drati, quod fit à minori c, æquale parallelogrammum ad majorem α applicetur, deficiens figura quadrata; in partes *ad*, *db* longitudine commensurabiles ipsam dividet. α 1. lem. 17. X.



Quoniam enim a d β *major est quàm* d b, *secetur* a b *bifariam in* e *ipsiusq;* e d *sumatur æqualis* e f. *Cũ autẽ totæ* a c *&* c b, *ablatæq;* e d *&* e f *sint æquales, erunt & reliquæ* a f, d b *æquales. Cumq; recta* a b *in æqualia in* e, *itemq; in æqualia in* d, *sit secta,* γ *erit rectangulum super* a d b *unà cum quadrato* e d *æquale quadrato ex* e b: *& quadruplum rectanguli* a d b *& quadrati ex* e d *æquale erit quadruplo quadrati ex* e b. *Sed quadruplo rectanguli* a d b *æquale est quadratum ex* c: *& quadruplo quadrati ex* e d *æquale est quadratum ex* f d *(cum quarta pars quadrati ex tota aliqua recta descripti æqualis sit quadrato ex totius rectæ dimidio descripto) & quadruplo quadrati ex* e b *æquale est quadratum ex* a b. *Quadrata igitur ex* c *&* f d *simul æqualia sunt quadrato ex* a b; *rectaq;* a d *plus potest recta* c *quadrato rectæ* f d. *Hãc dico commẽsurabilem toti* a b. *Cum enim* a d, d b *sint commensurabiles* δ *erit tota* ab *parti* db *cõmensurabilis longitudine: cum item ipsi* d b *composita ex*

β 2. Lem. 17 X.

γ 5. II.

δ 16. X.

d b & a f sit longitudine commensurabili (quæ dupla est ipsius d b) Ergò cum utraq; a b & composita ex d b, a f longitudine sit commensurabilis ipsi d b, e erunt etiam a b & composita ex db, af longitudine inter se commensurabiles: adeoq; cùm a b composita ex a f, d b tanquam una recta &

e 12 X.

ζ cor. 16. X. f d commensurabilis sit longitudine compositæ ex a f, d b, eadem a b reliquæ f d longitudine commensurabilis erit ζ. Ergò a b plus potest quàm c quadrato rectæ fd longitudine sibi commensurabilis.

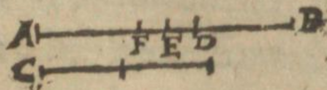
Contra si a b plus potest quàm c quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis &c, erunt segmenta a b, d b commensurabilia. Eodem nimirum modo ostenditur ab plus posse quàm c quadrato rectæ f d, longitudine sibi commensurabilis. Cum autē a b tota composita ex f d, a f & d b tanquam una sit longitudine cōmensurabilis ipsi f d, eadem cōmensurabilis ζ erit reliquæ ex af, db compositæ, Est verò & a f, d b, composita ceu dupla cōmensurabilis ipsi d b. Itaq; cum utraq; a d & d b cōposita ex a f, d b longitudine sit cōmensurabilis, erunt etiam a b, d b longitudine commensurabiles: adeoq; cum tota a b ex a d, d b composita ipsi d b sit commensurabilis longitudine, ipsæ a d, d b etiam inter se commensurabiles δ erunt longitudine.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 16.

Si

Si fuerint duæ rectæ lineæ *ab*, & *c* inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore *c*, æquale parallelogrammum ad majorem *ab* applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; major *ab* tantò plus poterit quam minore, quantum est quadratum rectæ lineæ *fd* sibi longitudine incommensurabilis. Quod si major *ab* tantò plus possit, quàm minor *c*, quantum est quadratum rectæ lineæ *fd* sibi longitudine incommensurabilis; quartæ autē parti quadrati, quod fit à minore *c*, æquale parallelogrammū ad majorē *ab* applicetur, deficiēs figura quadrata; in partes *ad*, *db* longitudine incommēsurabiles ipsam dividet.



Omnia constituantur ut in præcedenti propositione, nisi ut a d, d b *fiant incommensurabiles longitudine. Quod cum ita sit* ª *erit etiam tota* a b *parti* d b *longitudine incommensurabilis. Sed* d b *est commensurabilis suæ duplæ ex* db, af *cōpositæ.* ª 17. X.

Igitur cum duarum commensurabilium, d b *&* *compositæ ex* d b, a f, *una* d b *incommensurabilis sit ipsi* a b, *etiam reliqua ex* d b, a f *composita eidem* a b *incommensurabilis* β *erit: adeoq; cum* a b *ex* a f, f d *&* d b *composita sit incommensurabilis longitudine compositæ ex* a f, d b; *erit eadem* a b *etiam reliquæ* f d *incommensurabilis, atq; sic* a b *plus potest quàm* c, *quadrato rectæ* f d, *longitudine sibi incommensurabilis.*

β 14. X.

Contra in partes a d, d b *incommensurabiles divisa ostenditur linea* a b. *Iisdem enim, ut prius retentis, erit* a b *ipsi* f d *incommensurabilis. Itaq; cum tota,* a b, *ex* f d, a f, d b *composita, ipsi* f d *longitudine sit incommensurabilis, eadem etiam* a b *reliquæ ex* a f *&* d b *compositæ incommensurabilis erit. Sed una recta ex* a f *&* d b *ipsi* d b *longitudine est commensurabilis, utpote dupla. Duarum itaq; commensurabilium, compositæ ex* a f, d b *&* d b; *ipsâ compositâ ex* a f, d b *incommensurabili ipsi* a b, β *erit etiã reliqua* d b *eidem* a b *incommensurabilis. Cum itaq; tota* a b, *composita ex* a d, d b *longitudine incommensurabilis sit ipsi* d b, α *erunt & ipsæ* a d, d b *inter se incommensurabiles.*

Hactenus actum est de commensurabili & incommensurabili. Nunc transendum est ad Rationales & Medias.

LEMMA I.

Quoniam demonstratum est, lineas

neas longitudine commensurabiles, omninò & potentia commensurabiles esse, potentia verò commensurabiles non omninò & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam vocari Rationalem, & ipsi commensurabilem non solùm longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omninò & potentia commensurabiles sunt. Si verò expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic, Rationalis & commensurabilis ipsi longitudine & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabils existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Rationalis, potẽtia tantum ipsi commensurabilis.

LEMMA II. EX PROCLO.

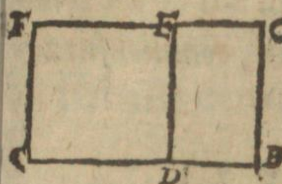
Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solùm. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solùm commensurabiles; atq; ob id rursus dicũtur Rationales & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; cõmensurabiles, inquam, inter se, vel longitudine & potentia vel potentiâ solùm: Et si quidẽ longitudine, dicũtur & ipsæ Rationales lõgitudine inter se cõmensurabiles, ut intelligatur, etiã potentia commensurabiles esse; si verò potentia inter se solum sunt cõmensurabiles: dicuntur ipsæ quoque Rationales; potentia solùm inter se commensurabiles.

LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ lineæ, *c d*, *b d*, erit, ut prima *cd* ad secundam *d b*: itá quadratum *d f*, quod fit à prima *cd*, ad re-

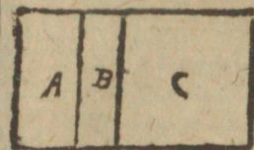
Ctangu

ctangulum *dg*, quod ſub duabus illis rectis lineis continetur: & ut ſecunda *db* ad primam *bc*; ita rectangulum *dg* ſub ipſis, ad quadratũ *ce* ex prima.



Cum enim rectangula c e, [a] *c* g *ſint æqualia*, [a] *ſunt ut latitudines.* a 1. VI.

LEMMA 4.



Spacium *a* Rationali ſpacio *b* commẽſurabile & *a* ipſum Rationale eſt.

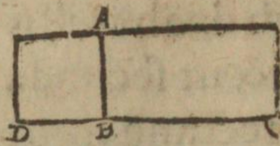
Sit enim c *quadratum rationale. Cum ergò* b *ſit rationale*, [a] *erit Rationali* c *commenſurabile*: a 9 def. X. *Cumq́ʒ & a ipſi* b *ſit commenſurabile, etiam* a *&* c *tanquam commenſurabilia ipſi* b, *inter ſe* [b] *commenſurabilia erunt, & ſic etiam Rationali* c b 12. X. *commenſurabile* a, *ipſum quoqʒ* [a] *rationale erit.*

PROPOSITIO XX.

Theorema 17.

Quod ſub Rationalibus, longitudine commenſurabilibus, rectis lineis *ab*, *bc*, ſecundùm aliquem prædictorum modorum, (*in lemmate ſecundo propoſitorum*, *ut longit.*) continetur Rectangulum, *ac*, rationale eſt.

α 9. def.
β 1. VI.
γ 10. X.



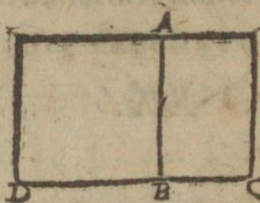
Super alterutra illarum, ut a b *fiat quadratum* a d α *rationale. Quia autem* a b, *id est*, b d, *&* b c *rationales commensurabiles sunt longitudine, &* β *est, ut* d b *ad* b c, *ita* a d *ad* a c, *erunt etiam* a d *&* a c *commensurabilia, atq;* a d *rationali, commensurabile* a c *etiam* γ *rationale.*

PROPOS: XXI.

Theorema 18.

Si Rationale *a c* ad Rationalem *a b* applicetur, latitudinē *b c* efficit Rationalem, & ei *a b*, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

α 12. X.
β 1. VI.



Ex a b *fiat quadratum, quod est rationale, erunt* a d, *ac rationalia; adeoq;* α *commensurabilia. Sed* β *ut* a d *ad* a c, *ita est* d b, *id est*, a b,

γ 6 def. X. *Rationalis ad* b c γ *rationalem.*

LEMMA I.

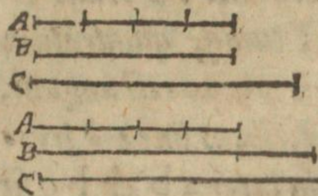
Recta linea potens spacium irrationale, irrationalis est.

Si enim

Si enim lineæ illius quadratum æquale sit ſpacio irrationali, ipſum irrationale eſſe oportet, aut quadratum illud foret contra hypotheſin rationale α propter ipſam lineam rationalem. α 20. X. XII. def. X.

LEMMA 2.

Duas rectas *bc* Rationales potentia ſolum commenſurabiles invenire.



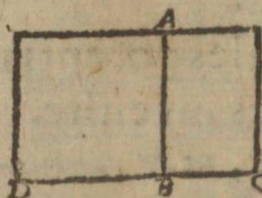
Hæ, ut & rationales longitudine commẽſurabiles, duplices tantùm ſunt; Aut enim illarum una, ut b, *longitudine eſt commenſurabilis datæ* a, *& tũ ipſi* a *æquali aſſumtæ* b *rationali α inveniatur potentia tantùm cõmenſurabilis, vel longitudine tantùm incommenſurabilis, quæ & ipſa β rationalis eſt: Aut neutra illarum longitudine ipſi* a *eſt commenſurabilis, & tum illi primum* b, *& huic* c *α inveniatur potentia commenſurabilis. Erunt ergò rationali* a *potentia commenſurabiles γ* b *& δ* c, *ipſæ quoq; β rationales.* α 11. X. β 6. def. X. γ ex conſtr. δ 11. X.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 19.

Quod ſub Rationalibus *ab, bc* potentia tantùm commenſurabilibus

rectis lineis cõtinetur rectangulum *a c*; Irrationale est: & recta linea ipsum potens, rationalis est. Vocetur autem Media.



Ex altera, ut a b, *descriptum sit quadratum* ad, *quod rationale est. Quoniam verò* α *est ut* b d, *id est*, a b *ad* b c; *ita* a d *ad* a c; & a b, b c *sunt longitudine incommensurabiles*; β *erunt &* a d, a c *incommensurabilia*; *cumq́, quadratum* a d *sit rationale*, γ *irrationale erit* ac *rectangulũ*, & *ipsi æquale quadratum describens linea* δ *irrationalis. Hæc autem linea cum inter* a b & b c *sit media* ε *proportionalis, vocatur Media*, & *rectangulum dicitur medium, quod vel sub duabus potentia tantùm commensurabilibus continetur, ut* a c: *vel quod alteri cuipiam*, *sub talibus lineis comprehenso*, *æquale est*, *quia æquale est quadrato super media proportionali descripto.*

α 1. VI.
β 10. X.
γ 10. def. X
δ per Lemma 1. 21 X.
ε 17. VI.

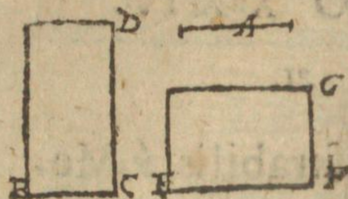
PROPOSITIO XXIII.

Theorema 20.

α 45. I.

Quod à Media *a* fit, ad Rationalem *b c* α applicatum, latitudinem efficit Rationalem *cd*, & ei *bc*, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

Quoniam



Quoniam a *est Media, potest rectang.* e g *duabus rationalibus* e f, f g *potentia tantùm commensurabilibus contentum, & rectangula* b d, e g *sunt æqualia,* β *laterum* ß *reciprocè proportionalium, ut* b c *ad* e f; *ita* f g *ad* c d. γ *Et ut quadratum ex* b c, *ad quadratum ex* e f, *quæ super rationalibus lineis sunt commensurabilia; ita quadratum ex* f g, *ad quadratum ex* c d *inter se commensurabilia, ipsæque rectæ* f g *&* c d δ *commensurabiles; & cum* f g *sit rationalis, utraque etiam Rationalis erit. Sed* c d *ipsi* b c *est incommensurabilis. Cum enim* e f, f g *sint rationales potentia tantùm commensurabiles;* ε *sitque, ut* e f *ad* f g, *ita quadratum ex* e f, *ad rectang.* e g, δ *erit quadratum ex* e f *rectangulo* e g *incommensurabile, & sic rectangulo* b d. *At quadratum ex* e f *commensurabile est quadrato ex* c d *(quia lineæ illæ sunt rationales & potentia tantum commensurabiles.) Itaque cum eidem quadrato ex* e f *rectangulum* b d *sit incommensurabile, etiam* b d *rectang.* ζ *erit incommensurabile quadrato* c d. *Cũ verò* c d *&* b c ε *sint ut quadratum* c d *& rectang.* b d *incommensurabilia:* δ *erunt ipsæ quoque longitudine incommensurabiles. Est ergò rationalis* c d, *& rationali* b c *potentia tantum commensurabilis seu longitudine incommensurabilis.*

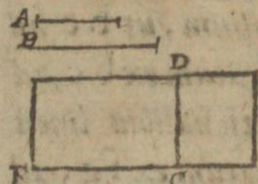
β 14. VI.
γ 22. VI.
δ 10. X.
ε lemma 19. X.
ζ 13. X.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 21.

Mediæ *a* commenſurabilis, *b*, Media eſt.



α 45. I.
β 23. X.
Sit d c *rationalis, ad quam* α *applicetur rectang.* d e *æquale quadrato ex* a, β *erit* c e *rationalis ipſi* c d *longitudine incõmenſurabilis. Eidem* c d α *applicetur rectangulum* d f *æquale quadrato ex* b. *Cum ergò* a, b *ſint commenſurabiles; ipſarum quadrata, id eſt, rectangula* d e, d f *etiam*
γ 1. VI. *commenſurabilia erunt.* γ *Eſt autem, ut* d e *ad*
δ 10. X. d f; *ita recta* e c *ad rectam* c f, *&* e c, *&* c f δ *longitudine ſunt commenſurabiles. Sed* e c *eſt rationalis, ipſi* c d *potentia tantùm commenſurabilis:*
ε 14. X. *Itaq; &* c f *eidem* c d *longitudine incommenſurabilis* ε *erit. Et quia rationalis eſt* c f, *cum rationali* c d *commenſurabilis ſit potentia, potentia etiam*
ζ 22 X. *commenſurabiles erunt* c d, c f. ζ *Ac proinde* b *recta potens rectangulum* d f *ſub rectis* c d, c f *potentia tantum commenſurabilibus, media eſt.*

Corollarium.

Spacium *d f* Medio ſpacio *d e* commenſurabile, medium eſt.

Patebat

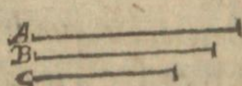
Patebat. quod utraq; continebantur rectis potentia tantum commensurabilibus.

LEMMA 1.

Congruit hoc omniquaq; cum lemmate 1, 19 propos. nisi quod loco Rationalis semper legendum est Medium.

LEMMA. 2.

Duas rectas Medias *ab* longitudine commensurabiles; item duas *ac* potentia tantùm commensurabiles invenire.



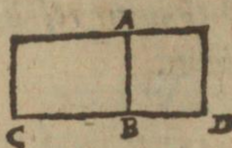
Si b *ipsi* a *Mediæ longitudine;* c *verò eidem* a *potentia tantùm commensurabilis inveniatur, utraq; etiam α erit Media,* a b *quidem longitudine,* a c *verò potentia tantum commensurabiles mediæ.* α 24. X.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 22.

Quod sub Mediis Longitudine commensurabilibus rectis lineis *a b, b c* continetur rectangulum *a c,* Medium est.

Ex



α 1. VI. *Ex* a b *media fiat quadratũ* ad, *quod erit Medium, cum* α *sit, ut* d b *ad* b c, *ita* a d *ad* a c: *sunt autem* d b *id est* a b *&* b c *longitudine commensurabiles.*

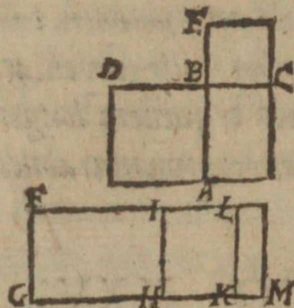
β 10. X. *Itaq;* a d, a c β *erunt commensurabilia.* γ *Quare*

γ Cor. 24. X. *spacium* a c *medio* a d *commensurabile Medium est.*

PROPOS: XXVI.

Theorema 23.

Quod sub Mediis potentia tantùm commensurabilibus rectis lineis *a b*, *b c* continetur rectangulum, *a c*, vel Rationale est, vel Medium.



α 22. X. β 45. I. *Descriptis quadratis ex* a b *&* b c α *mediis ad Rationalem* f g β *applicentur rectangula* f h, h l, l m *æqualia spaciis* a d, a c, c e, *ut* f m *fiat rectangulum unum. Cum itaque* a d *&* c e

γ 23. X. δ 34. I. *sint media, etiam* f h, l m *erunt media,* γ *eorumq; latitudines* g h, k m *rationales propter* f g, k l δ *æquales rationales, quibus sunt applicata, & potentia commensurabiles erunt. Cumq;* a b, b c *sint potentia commensurabiles, etiam earum quadrata* a d, c e, *& his æqualia rectangula* f h, l m

com-

commensurabilia erunt. ε *Sed ut* fh *ad* lm *ita* ε 1. VI.
recta gh *ad* km. ζ *Sunt igitur* gh, km *longi-* ζ 10. X.
tudine inter se commensurabiles. Et quia ra- η 20. X.
tionali fg *potentia sunt commensurabiles; etiam rectangulum sub* gh, km *comprehensum* η *rationale erit.* ι *Quia verò est, ut* db *ad* bc; *ita* ad *ad* ac: *& ut* ab *ad* be, *ita* ac *ad* ce; *erit ut* ad *ad* ac, *ita* ac *ad* ce; *cum sit* bd *ad* bc, *ut* ab *ad* be, *quia utriq; utraq; æqualis. Proinde & ipsis æqualia rectangula* fh, hl, lm *erunt proportionalia. ut & ipsorum Bases* gh, hk,
km: θ *adeoq; rectangulum sub* gh, km *ratio-* θ 17. VI.
nale quadrato ex hk *erit æquale, quod & ipsum & ipsius latus* hk *rationale est; & ob id* fg *ra-*
tionali expositæ longitudine vel potentia κ *com-* κ 6. def.
mensurabilis est hk. *Et si* hk *ipsi* hi *id est* fg *longitudine commensurabilis fuerit,* μ *erit rectangulum* hl *rationale: Sed si tantum potentia* α *erit Medium. Est ergò rectangulum sub Mediis potentia tantum commensurabilibus vel Rationale vel Medium*

Scholium.

Facilius quàm per 45. I. poteſt dato *ac* rectangulo æquale fieri ad *hl* ra-
tionalem datam, ſi trib9 his α applice- α 12. VI.
tur quarta proportionalis *hk*. Rectan-
gulum enim ſub extremis *hi*, *hk* β æ- β 16. V.
quale eſt rectãgulo *ac* ex intermediis.

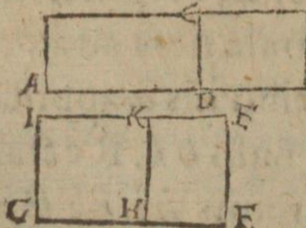
Siqui-

Siquidem verò rectangulum sub duabus medijs, potentia tantùm cõmensurabilibus vel rationale vel medium est, docetur propos. 28. quomodo inveniendæ sint illæ mediæ, quæ comprehendunt rationale; & 29; quæ Medium. Atq; sic ex hactenus
γ 20. X. *demonstratis colligitur, γ Rectangulum sub dua-*
δ 22. X. *bus Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale esse, potentia verò Medium. Rursus δ rectangulum sub mediis longitudine commensurabilibus esse Medium: Sub Mediis verò potentia tantùm commensurabilibus vel Rationale vel Medium esse. (Sub Mediis verò nec potentia nec longitudine commensurabilibus, est Medio Medium, æquale rectangulo sub Rationali & Irrationali Media; quàm speciem Euclides non habet.)*

PROPOS: XXVII.

Theorema 24.

Medium *ab* non superat Medium *ac* Rationali. *db*



Si enim d b *est Rationale, positæ* e f *lineæ rationali α applicetur* e g
α 4;. I. *medio* a b *æquale, & medio* a c *rectangulum* e h *æquale, eritq;* d b *rationa-*

rationali æquale k g. *Cùm ergò Media* e g, e h *ad rationalem* e f *sint applicata* β, *erunt* f g, f h *Rationales incõmensurabiles longitudine ipsi* e f *rationali.* *Cum item rationale* h i *ad rationalem* h k, *id est,* e f *sit applicatum,* γ *erit* h g *rationalis longitudine ipsi* e f *commensurabilis. Sed* e f *ipsi* f h *longitudine est incommensurabilis.* *Ergò* h g *eidem* f h *longitudine incõmensurabilis* δ *erit.* ε *Verùm ut* f h *ad* h g, *ita quadratum ex* f h, *ad rectangulũ* f h g. *Itaq; quadratum ex* f h *incommensurabile* ζ *erit rectangulum* f h g. *Sed quadrato ex* f h *commensurabile est quadratum ex* h g *(quia utraq; ex rationalibus lineis sunt descripta)* *adeoq; duo quadrata ex* f h, h g *simul commensurabilia sunt quadrato ex* f h; *&* η *rectangulum* f h g *commensurabile est bis sub* f h, h g *sumto rectangulo (quia duplum) Itaq; quadrata* f h, h g *simul incõmensurabilia* θ *erũt rectangulo bis sumto sub* f h, h g. ι *Quare & compositum ex quadratis rectarum* f h, h g *& ex bis sumto rectangulo* f h g *incommensurabile est composito ex quadratis rectarum* f h, h g. *Sed quadratis* f h, h g, *unà cum rectangulo* f h g *bis sumto* κ *æquale est quadratum* f g. *Ergò quadratum ex* f g, *composito ex quadratis rectarum* f h, h g *incommensurabile erit.* *Quod compos. cum sit* λ *rationale: etiam ipsi incommensurabile quadratum ex* f g *erit irrationale, & sic etiam recta* f g *irrationalis,*

β 23. X.
γ 21. X.
δ 14. X.
ε 3. Lemma 19. X.
ζ 10. X.
η 16. X.
θ 14. X.
ι 17. X.
κ 4. II.
λ 4. Lemma 19. X.

nalis, contra hypothesin, quæ illam longitudine incommensurabilem ipsi ef *ponebat.*

Scholium.

Rationale *eg* ſuperat Rationale *eh, hg* Rationali.

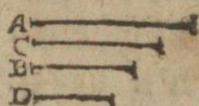
α. 9 def X. γ 12 X. *Quia enim* eg, eh *sunt rationalia,* α *erunt eadem commensurabilia quadrato rationalis exposita;* β *quare & inter se commensurabilia.* γ cor. 16. X *Itaq; cum totum* eg *ex* eh, kg *compositũ, ipsi* eh *sit commensurabile;* δ 4 Lemma 19. X. *erit quoq; idem* eg *reliquo* kg γ *commensurabile. Sed* eg *est rationale.* δ *Ergò &* kg *Rationale erit.*

PROPOSITIO XIIX.

Problema 4.

Medias *cd* invenire, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

α Lemma 2. 21. X. β 13. VI. γ 12. VI.



Inter α *assumtas* a, b *rationales potentia tantùm commensurabiles,* β *cadat media* c, *&* γ *fiat, ut* a *ad* b, *ita* c *ad* d. *Erunt* c d *mediæ potentia tantùm commensurabiles, quæ comprehẽdunt Rationale. Rectangulum sub* ab *rationalibus*

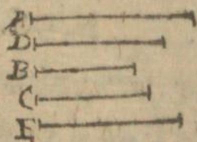
libus potentia tantùm commensurabilibus δ *Medium est, & c illud potens* ε *Media. Sed ut a ad b, ita est c ad d : a & b sunt potentia tantùm commensurabiles.* ζ *Ergò & c, d : & propter c Mediam etiam d* η *Media. Sunt itaq; inventæ c d mediæ potentia tantùm commensurabiles; Quæ etiam Rationale continebunt. Cum enim sit ut a ad b, ita c ad d; etiam permutando est, ut a ad c, ita b ad d. Sed ut a ad c, ita c ad b. Ergo ut c ad b, ita b ad d; ideoq; b media proportionalis inter c & d* ε *poterit rectangulum sub c d comprehensum. Sed quadratum ex rationali, est rationale. Ergò & rectangulum sub c d, rationale est.*

δ 22. X.
ε 17. VI.
ζ 10. X.
η 24. X.

PROPOS: XXIX.

Problema 5.

Medias *de* invenire, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant.



α *Sumtis tribus potentia tantùm commensurabilibus, interq; a, b* β *Media d* γ *fiat, ut b ad c, ita*

α Lemma 1. 21. X
β 13. VI.
γ 12. VI.

e, ita d ad e. Erunt d, e mediæ potentia tantùm commensurabiles continentes Medium. Cum a, b rationales potentia tantùm commensurabiles sint:
δ.22.X. ex illis rectangulum δ erit medium, & illud ε po-
ε 17. VI. tens d media. Sed, quia, ut b ad c potentia tantum commens. ita d ad e ζ etiam potentia tãtum
ζ 10. X. commensurabiles sunt d & e, & Mediæ d commensurabilis e η media. Sic itaq; d, e mediæ potentia
η 24. X. tantum cõmensurabiles, sunt inventæ; quæ etiam continebunt Medium. Quia enim est, ut b ad c, ita d ad e; & permutando, ut b ad d, ita c ad e erit. Vt autẽ b ad d, ita d ad a; erit ergò d ad a ut
θ 16. VI. c ad e. Itaq; rectangulum sub d, e, θ æquale est ei, quod sub a, c. Hoc autem sub rationalibus potentia solum commensurabilibus & δ Irrationale est & Medium. Ergò & rectangulum su b d, e.

Scholium 1.

Duos numeros planos similes invenire.

A, 6.	C, 12.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F, 96.

Assumptis quatuor quibusvis numeris proportionalibus, ut a ad c, ita b ad d, ex a in b, ut & ex c in d facti numeri e & f sunt similes plani, quia constant lateribus proportionalibus, ut patet ex constructione.

LEM-

LEMMA I.

Duos numeros Quadratos invenire, ita, ut compositus ex ipsis Quadratus etiam sit.

A + + + + + E + + + + + D + + + + + + + + B

C + + + + + + + +

Inveniantur per Scholion præcedens duo planè similes ab *&* c, *ambo pares vel impares.* α *Cumq́; sublato pari à pari vel impari ab impare semper remaneat par, ex* a b *sublato* d b *ipsi* c *æquali reliquus* a d *par erit. Quo diviso bifariam in* e, *dico factum ex* a b *in* b d, *(qui quidem* β *quadratus est) cum quadrato ex* e d *compositum, facere quadratum. Quia enim numerus* a d *bifariam sectus est in* e, *ipsiq́; additus* d b, γ *erit qui fit ex* ab *in* b d *quadratas, una cum quadrato* d e, *æqualis numero quadrato ex* e b.

α 24. & 26. IX.

β 1. IX.

γ 6. II.

Corollarium.

Quando *a b* & *c* ſunt plani ſimiles, quadrati ex *e b* & *e d* ſe excedunt quadrato ex *a b* in *b d*. Cum autem *a b* & *c* non ſunt ſimiles, ſed tamen vel pares ſimul; quadrati *e b* & *e d* non excedunt ſe quadrato: Si enim exceſſus hic ex *a b*, *b d* factus eſſet quadra-

* 2. IX. tus, essent *a b* & *c* * plani similes, contra hypoth.

Scholium 2.

Huic facilè inveniuntur duo numeri quadrati, qui se excedunt quadrato, si sumantur duo plani similes vel pares vel impares, ut lemma præcedens jubebat; Itemq; alij duo quadrati, qui se non quadrato excedunt, si duo dissimiles sumuntur plani. Quod tamen facilimè fit secto numero quadrato in quadratum & non quadratum, ut 25, in 4, & 21.

LEMMA 2.

Duos Numeros quadratos invenire, ita, ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . B

C . . . .

Sint plani similes a b *&* c, *eademq́; adhibita constructione ut in lemmate præcedēte, auferatur ex* d e *unitas* e f. *Erit quadratus ex* d f *minor quadrato ex* d e *propter inæqualitatem laterū. Dico quadratos ex* a b *in* d b, *& ex* d f *in se cōpositos nō efficere quadratum. Si enim quadratus esset, esset quadrato* b f *vel major vel æqualis vel minor.*

Primò

Primò. Si esset major, latus ipsius esset majus latere b f, *essetq́ ipsi* b e *vel æquale vel majus, (quia minus esse nequit, cum inter* b f *&* b e *unitate tantùm differentes non cadat medius) Si æquale, ita, ut quadrato ex* b e *æqualis sit quadratus, compositus ex quadrato, facto ex* ab *in* bd *& ex quadrato* df, *Cũ eidem quadrato ex* be *ex præcedente lẽmate æqualis sit numerus factus ex* ab *in* bd *& ex* de *in se, erunt, factus ex* ab *in* bd *cũ quadrato ex* df, *& ex* ab *in* bd *cum quadrato ex* de *æquales. Ablatoq́ communi, qui ex* ab *in* bd *fit, erunt quadrati ex* de, *&* df *æquales, ipsaq́ latera* de, *totum &* df *pars æqualia. Latus itaq́ quadrati ex quadratis compositi, quorum alter ex* ab *in* bd, *alter ex* fe *in se fit, nequit esse æquale numero* be. *Neq́ eodem est majus. Si tamen esset, ut æquale* bi. *Cum quadratus ex latere majore, major sit quadrato ex* be *minore latere, etiam compositus ex quadratis, quorũ alter ex* ab *in* bd, *alter ex* df *in se fit, major quadrato ex* be, *cui per lemma præcedens æqualis est numerus ex* ab *in* bd *cum quadrato ex* de. *Itaq́ ablato communi ex* ab *in* bd, *erit reliquus quadratus ex* df *æqualis reliquo quadrato ex* de *major, latusq́* df *latere* de *majus, pars toto. Cõpositi ergò ex quadratis* ab *in* bd *& ex* df *in se quadrati latus majus esse nequit latere* be: *adeoq́, ut ostensũ, nec æquale, nec minus. Ideoq́ quadrat. ille cõpositus nõ est major quadrato ex* bf.

Deinde ponatur quadratus ex a b *in* b d *&* d f *in se, æqualis quadrato ex* b f, *&* a h *sit duplus unitatis* e f. *Quoniam totus* a d *totius* e d *est duplus (quia* a d *in* e *est bifariam sectus) & ablatus*
α 7.VII. a h *ablatæ unitatis* e f; α *erit & reliquus* h d, *reliqui* f d *duplus &* h d *in* f *bifariam sectus. Factus itaq; ex* h b *in* b d, *unà cum quadrato ex*
β 6. II. d f. *æqualis erit quadrato ex* b f. *Sed eidem æqualis ponitur factus ex* a b *in* α b d *& quadrato ex* d f. *Itaq; ablato communi quadrato ex* d f *relinquuntur ex* a b, *in* b d *& ex* h b *in* b d *æquales.*
γ 18. VII. *Atq; sic* ab *&* hb *eundẽ* bd *multiplicantes, producentes numeros æquales,* γ *erunt ipsi quoq; æquales, pars toti. Non ergò factus ex* a b *in* b d *cum quadrato ex* d f *quadrato ex* b f *æqualis est.*

Deniq; ponatur quadratus ex a b *in* b d *cum quadrato* d f *minor quadrato* b f; *unde & latus ejus latere* b f *minus erit, ut* b g; *sumaturq; ipsius* e g *duplus* a i. *Quoniam ergò totus* a d *totius* e d *duplus est, & ablatus* a i *ablati* e g; *erit & reliquus* i d *reliqui* g d *duplus; &* i d *in* g *divisus bifariam.* β *Numerus ergò ex* i b *in* b d *cum quadrato ex* d g *æqualis quadrato ex* b g. *Sed eidem quadrato ex* b g *æqualis ponitur ex* a b *in* b d *cum quadrato ex* d f. *Ablatis igitur quadratis* d g, d f *quorum* d g *minor est; remanebit ex* i b *in* b d *major eo qui ex* a b *in* b d *pars toto. Non est ergò ex* a b *in* b d *cum quadrato ex* d f *minor quadrato ex* b f. *Sicut neq; major, neq; æqualis osten-*

ostensus est. Non itaq; est quadratus ex a b *in* b d *cum quadrato ex* d f. *Quod erat propositum.*

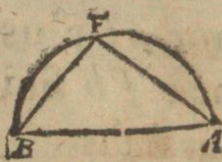
Scholium. 3.

Hinc inventu faciles sunt duo numeri, ut compositus ex illis ad neutrum illorum habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum. Talis enim est compositus non quadratus ex duobus quadratis. Tales etiam sunt minimi non quadrati, in quas quadratus aliquis dividitur.

PROPOS: XXX.

Problema 6.

Invenire duas Rationales *a b, af* potentia tantùm commensurabiles, ita ut major *ab*, quàm minor *af*, plus possit quadrato rectæ lineæ *b f* longitudine sibi commensurabilis.



Assumta recta Rationali a b, *&* α *duob. numeris totis* c d, c e *quorũ excessus* d e *non sit quadratus*, β *fiat, ut* c d *ad* d e, *ita quadratum rectæ* ab *ad quadratum* a f *quæ semicirculo*

α 2. Scholi. propos. præced.

β per lemma 6. X.

micirculo super a b *aptetur &* f b *connectatur.*
γ 31. III. *Cum ergo* f *in semicirculo* γ *sit rectus, æquale est quadratum* a b *quadratis* a f, f b *&* a b *quàm* a f *plus potest quadrato* f b. *Cumq; quadratum ex* a b *sit ad quadratum* a f, *ut* c d *ad* d e,
δ 6. def. δ *erunt illa quadrata inter se commensurabilia, adeoq; erit æquè quadratum* a f *Rationale, & ipsa* a f *Rationalis; atq; quadratum* a b *super Rationali* a b *descriptum Rationale est. Rationales ergò sunt* a b, a f *& potentia tantùm commensurabiles. Longitudine enim commensurabiles esse*
ε 9. X. ε *nequeunt erunt*, ζ *cum non habeant rationem*
ζ 24. IIX. *quam numerus quadratus ad numerum quadratum quia* d e *non est quadratus.*

Iam verò quoniam est ut c d *ad* d e, *ita quadratum ex* a b *ad quadratum ex* a f, *erit convertendo, ut numerus quadratus* c d *ad numerum quadratum* c e, *sic quadratum ex* a b *ad quadratum ex* b f. ε *Sunt ergò* f b, a b *longitudine commensurabiles.*

PROPOS: XXXI.

Problema 7.

Invenire duas *a b*, *a f* Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita, ut major *a b* quàm minor *a f* plus possit Quadrato rectæ lineæ *f b* sibi Longitudine in commensurabilis.

Assum-



C 144. E 16. D C. 166. D.
C ✦✦✦✦✦✦ E -✦✦ D✦

Assumta Rationali a b, α *inveniantur duo quadrati numeri* c e, e d, *quarum summa* c d *non sit numerus quadratus: vel quadratus* c d *in duos* c e, e d *non quadratos dividatur*; β *habebit* c d *ad neutrum* c e, *vel* e d *proportionē numerorum quadratorum*, γ *fiatq;, ut* c d *ad* d e *ita quadratum* a b *ad aliud, ut* a f; *& applicata* a f *ad semicirculum super* a b *descriptum, connectatur* f b *Iam poterit* a b *plus quam* a f *quadrato rectæ* f b, δ *eruntq;* a b, a f *Rationales potentia tantum commensurabiles: Sed cum convertendo sit, ut prius, quadratum* a b *ad quadratum* f b, *ut* c d *ad* c e: c d *autem ad* c e *non sit ut quadratus ad quadratum. Non itaq;* a b *ad* a f *habet rationem numeri quadrati ad numerum quadratum*, ε *& sunt Longitudine incommensurabiles. Inventæ ergò sunt duæ rectæ* a b, a f *potentia solùm commensurabiles, ut* a b *major plus posßit quam minor* a f *quadrato rectæ* f b *sibi longitudine incommensurabilis*.

α per Lemma 2. 29. X.
ς 24. IIX.
β Lemma 6. X.
δ 30. X.
ε 9. X.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut major ad minorem; ita

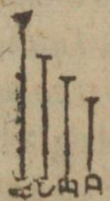
ita rectangulum sub ipsis contentum ad quadratum minoris.

Demonstratio eadem est cum Lemmatis 3. in propos. 19. demonstratione.

PROPOS: XXXII.

Problema 8.

Invenire duas Medias *c*, *d* potentia tantùm commensurabiles, quæ rationale contineant; ita, ut major *c*, plus possit quàm minor *d*, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.



α 30. X. *α Inveniantur duæ Rationales* a, b *potentia tantùm commensurabiles, ut* a *major plus possit quàm minor* b, *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, inter quas sit media proportionalis* c; *fiatque, ut* a *ad* b, *ita* c *ad* d. *Quoniam ergò* a b *Rationales potentia tantùm sunt commensurabi-*

β 22. X. *les, erit sub ipsis rectangulũ β irrationale, & c recta illud potens Media. Et quia est* c *ad* d, *ut* a *ad* b, *quæ potentia tantùm sunt cõmensurabiles, etiam* c & d *potentia tantùm commensurabiles, γ e-*

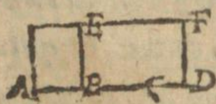
γ 10. X. δ 24. X. *runt; & Mediæ* c *commensurabilis* d *δ Media.*

Com-

Comprehendent hæ duæ Mediæ c, d *potentia tantùm commensurabiles Rationales quod ex 28. hujus patet. Quia enim est ut* a *ad* b, *ita* c *ad* d *: Sed* a *quàm* b *ᵉplus potest, quadrato rectæ longitudine* ᵉex constr.
sibi commensurabilis; ᶻ *poterit & c plus quàm* d ᶻ 15. X.
quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Patet ergò propositũ. Si autẽ a, b, *rationales se excederent quadrato rectæ sibi incommẽsurabilis longitudine, eodem modo ostenderetur* c, d *medias potentia tantùm commensurabiles continere Rationale, ut major* c *plus possit quàm* d, *quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis.*

LEMMA.

Si sint tres lineæ rectæ *a b, b c, c d*, erit ut prima *a b* ad tertiam *c d* ita rectangulum *a e* sub prima *a b* & secunda *b c* contentum ad id *c f*, quod sub secunda *b c* & tertia *c d* continetur.



Describatur ex b c, *quadratum* c e *compleaturq́; rectangulum* a f. ᵃ *Erit* a e, *ad* c f *ut* a b ᵃ 1. X.
ad c d.

PROPOSITIO XXXIII.

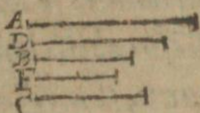
Problema 9.

Invenire duas Medias *d e* potentia

solùm

ſolùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita ut major *d* plus poſſit quàm minor, *e*, quadrato rectæ lineæ, ſibi longitudine commenſurabilis.

α 30. X.
β per Lemma. 2. 21. X.



α Inventis duabus a, c, *aſſumatur* b *β utrią; longitudine incommenſurabilis ut habeantur tres Rationales* a b c *potentia tantùm commenſurabiles; ita ut* a *plus poßit quàm* c *quadrato lineæ ſibi longitudine commēſurabilis, γ Sumaturą;* d *media proportionalis inter* a *&* b; *δ & ſit* d *ad* b, *ut* c *ad* e. *Quia ergò ε eſt, ut* a *ad* c, *ita rectangulum ſub* a b, *ad rectangul. ſub* b c. *Sed rectangulo ſub* a b, *ζ æquale eſt quadratum ex* d, *η & rectangulo ſub* b c, *rectangulum ſub* d e. *Ergò ut* a *ad* c, *ita quadratum ex* d, *ad rectangulum ſub* d e; *Sed ut quadratum* d, *ad rectangulum* d e, *θ ita recta* d *ad rectam* e. *Eſt ergo* d *ad* e, *ut* a *ad* c: *quæ cum potentia tantum ſint commenſurabiles; κ Ergò &* d e. *Et quia* d *potens ſpacium, ſub Rationalibus* a b *potentia ſolùm commenſurabilibus, λ irrationalis eſt & Media μ erit: etiam ipſi commenſurabilis* E *Media. Sunt ergò* d, e *duæ Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles, Cùm verò oſtenderimus rectangulo ſub* b c *Medio æquale eſſe rectangulum ſub*

γ 13. VI.
δ 12. VI.
ε per Lemma 32. X.
ζ 17. VI.
η 16. VI.
θ 3. Lem. 19. X.
κ 10. X.
λ 22. X.
μ 24. X.

d e, λ erit hoc quoq; medium. Deniq; cum ostensum sit esse d ad e, ut a ad c; Sed a plus posse quàm c, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; ν similiter pl9 etiã poterit d quàm e. Quod erat faciendum. ν 15. X.

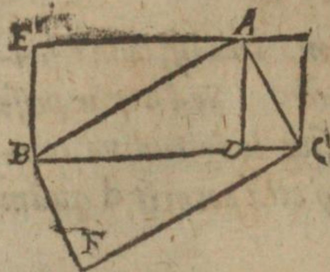
Quod si Rationalium a b c assumtarum potentia commensurabilium a plus posset quàm c, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, similiter ostenderetur, d, e, duas medias inventas potentia solùm commensurabiles, continere medium, ut major d plus possit quàm minor e, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA. 1.

Sit unum rectangulum *a b c*, angulum habens *b a c* rectum, à quo perpendicularis *a d* esto demissa. Dico, rectangulum sub *c b*, *b d* æquale esse quadrato *a b*; & contentum sub *b c*, *c d* æquale quadrato *a c*, & contentum sub *b d*, *d c*, æquale quadrato *a d*: contentum deniq; sub *b c*, *a d* æquale contento sub *a b*, *a c*.

Quia

α 8. VI.
β 17. VI.
γ 16. VI.
δ 41. I.

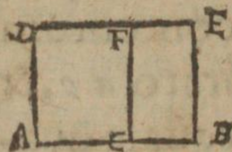


Quia enim a b *est inter* b c *&* b d, α *media proportionalis; rectangulum ex* b c *&* b d β *æquale est quadrato* a b. *Eodémq; modo rectangula ex* b c, c d, *& ex* b d, d c *æqualia sunt quadratis* c a *&* d a. *Deniq; quia triangula* a b c, a b d α *sunt similia, erit, ut* b c *ad* a c; *ita* a b *ad* a d, *quare rectangulum ex* b c, ad *æquale est rectangulo sub* a b, a c; *vel ejusdem trianguli* a b c δ *dupla rectangula* c e, c b *sunt æqualia.*

LEMMA 2.

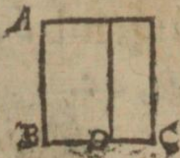
Si recta linea *a b* secetur in duas partes inæquales *a c*, *c b*; erit, ut major pars *a c* ad minorem *c b*, ita rectangulum *a f*, sub tota *a b* & majore parte, ad rectangulum *c d* sub tota *ab* & minore parte *cd* contentum.

α 1. VI. *Super* a b *describatur quadratũ, & ex* c *erigatur perpendicularis. Quoniam* α *est, ut* a c *ad* c b, *ita* a f *ad* c d, *patet propositum.*



LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquaquales *a b*, *bc* minor autem *b c* secetur



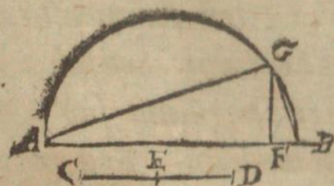
cetur in *d* bifariam; erit rectangulũ *a c* sub ipsis contentum duplũ rectanguli *a d*, quod sub majori linea *a b* & dimidia parte *b d*, minoris *b c* continetur.

Completo a c *rectangulo, & ducta parallela* per d *ipsi* a b, α *patet propositum.* α 1. VI.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema 10.

Invenire duas rectas lineas *a b, g b*, potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium.



α *Inveniantur duæ Rationales lineæ* a b, c d, *minorq;* c d *secetur bifariã in* e, β *fiatq; rectangulum sub* a f, f b *æquale quadrato* c e. *Describatur etiam semicirculus* a g b *& ipsi* a b *perpẽdicularis* f g *agatur, cõnectanturq;* a g, g b. *Quia ergò* a b *plus potest quàm* c d *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumq; est ad* ab *rectangulum* a f b, *æquale* α 31. X. β Lemma 2 17. X.

X quartæ

quartæ parti quadrati cd, *deficiens figura quadratæ: γ erit* af *ipsi* fb *longitudine incõmensurabilis. δ Sed ut* af *ad* fb, *ita rectangulum* baf *ad* abf *rectang. Quæ duo rectangula ε æqualia sunt quadratis* ag, gb, *quia* g *in semicirculo ζ est rectus. Erit igitur, ut* af *ad* fb, *ita quadratum* ag, *ad quadratum* gb. *Sed* af, fb *sunt longitudine incommensurabiles. η Ergò & quadrata* ag, gb, *ipsæq; rectæ* ag, gb *potentia θ incommensurabiles. Et quia quadratum ex* ab *Rationali Rationale κ æquale est quadratis* ag, gb, *etiam ex ipsis compositum Rationale erit. Rursus, quia* afb *rectangulum, æquale quadrato* ce *λ æquale est quadrato* fg, *erunt quadrata* fg, ce, *æqualia, & ipsæ rectæ* fg, ce *æquales; eritq;* cd *dupla ipsius* ec, *etiam dupla ipsius* fg. *μ Quare rectangulum sub* ab, cd, *duplum erit rectanguli sub* ab, fg. *Sed sub* ab, cd *Rationalibus contentum est ν Medium: Ergò & sub* ab, fg *ipsi commensurabile, utpote duplum, est ξ Medium. Sed sub* ab fg *rectangulo ο æquale est rectangulum sub* ag, gb: *Ergò sub* ag, gb *est medium. Sed ex eorum quadratis compositum erat Rationale. Ergò inventæ sunt duæ* ag, gb *potentia incommensurabiles, quæ faciunt ex ipsarum quadratis compositum Rationale, sed Rectangulum sub ipsis Medium. Quod erat propositum.*

γ 19. X.
δ Lemma 2 33. X.
ε Lemma 1. 33. X.
ζ 31. III.
η 10. X.
θ 4. def.
κ 47. I.
λ 17. VI.
μ Lemma 3 33. X.
ν 22. X.
ξ Coroll. 24. X.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

Problema 11.

Invenire duas rectas lineas *ag*, *gb*, potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum Quadratis Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.

Inveniantur duæ Mediæ ab, c d *ad mentem partis posterioris prop. 32. fiantq; reliqua, ut in præcedenti; erunt* a g, g b *potentia incommensurabiles. Quia enim Mediæ* ab *quadratum æquale* α *rectarum* a g, g b *quadratis est Medium, etiam compositum ex* a g, g b *quadratis est Medium. Rursusq; ut in antecedenti propositione ostenditur rectangulum sub* a b, c d, *duplum esse rectanguli sub* a b, f g; *Eo verò existente Rationali, erit & hoc ipsi commensurabile; & huic* β *æquale ex* a g, g b *Rationale. Cum ergò sub* a g, g b *etiam sit Medium, patet propositum.*

α 47. I.

β Lemma 33. X.

PROPOS: XXXVI.

Problema 12.

Invenire duas rectas lineas, *ag,gb* potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum Quadratis Medium, & Rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq́; composito ex ipsorum Quadratis.

Inveniantur iterum ex sententia 2. partis propos. 33. duæ Mediæ a b, c d, *& reliqua fiant, ut in 34. hujus. Ostenditur similiter* a g, g b *rectas incommensurabiles esse potentia; compositumq́; ex ipsarum quadratis esse Medium, ipsumq́; rectangulum sub* a g, g b *esse Medium. Sed quia ab ipsi* c d *est* α *incommensurabilis longitudine,* c e *verò ipsi* c d, *ut duplæ commensurabilis longitudine, etiam* a b *ipsi* ce *longitudine incommensurabilis* β *erit.* γ *Sed ut* a b *ad* c e; *ita quadratum ex* a b, *ad rectangulum sub* a b, c e, *id est, ad* a b f g, *vel* a g, g b. *Ergò quadratum* a b *est* ε *incommensurabile rectangulo* a g, g b. *Quæ sunt duæ rectæ inveniendæ.*

α ex hypo.
β 13. X.
γ 3. Lemma 29. X
δ 1. Lemma 33. X.
ε 10. X.

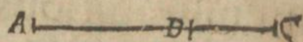
Princi-

Principium Senariorum per Compositionem.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema 25.

Si duæ Rationales *a b, b c* potentia tantùm commensurabiles componantur; tota *a c* Irrationalis erit. Vocetur autem ex Binis nominibus.



α Inventæ duæ a b, b c *componantur. Fiet tota* a c *Irrationalis. Quia enim* a b *ipsi* b c *est longitudine incommensurabilis, estq; ut* a b *ad* b c, *ita* a b c *rectangulum ad* b c *quadratum*, *γ erit rectang.* a b c *quadrato* b c *incommensurabile: Sed rectangulo* a b c *ipsius duplum est commensurabile; & quadrato* b c *quadratum* a b *est commensurabile* (*quia sunt Rationalia*) *adeoq; ex quadratis* a b, b c *compositum eidem* b c *quadrato commensurabile δ est. Itaq; quod bis sub* a b, b c *continetur, composito ex quadratis rectarum* a b, b c *incommensurabile ε erit. Quare & compositum ex eo, quod bis sub* a b, b c *& ex composito quadratorum* a b, b c, *ζ id est, ex tota* a c *quadratum, composito ex quadratis rectarum* a b, b c *incõmensurabile η erit. Sed quod ex quadratis rectarum*

α 2. Lem. 21. X.
β lem. 31. X
γ 10. X.
δ 16. X.
ε 14. X.
ζ 4. II.
η 17. X.

ctarum a b, b c, *est Rationale; quia commensurabile est quadrato rationalis* b c. *Igitur ex* a c *quadratum, Rationali ex* b c *quadrato incommensurabile* θ, *irrationale est ipsaq; recta* a c *Irrationalis.* *Vocetur autem ex* binis nominibus *vel* Binomium, *quia ex duobus nominibus nempe duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus componitur.*

θ.10.def.X.

Scholium.

Ex duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus duæ Irrationales procreantur. Media enim inter eas α est Irrationalis, β itemq; ex ipsis composita seu Binomium.

α 22. X.
β 37. X.

PROPOS: XXXIIX.

Theorema 26.

Si α duæ Mediæ *ab, bc* potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota *ac* Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

α.28. X.

A———E———C

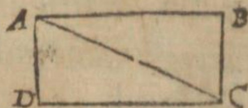
Quia enim a b *ad* b c *est, ut* a b c *rectangulum*
ad

ad quadratum b c: *Sed* a b, b c *sunt longitudine incommensurabiles.* β *Sunt ergò* a b c *rectangulum & quadratũ* b c *incommensurabilia. Est autem rectangulo* a b c *bis sub* a b, b c *commensurabile;&* γ *quadrato* bc *compositum ex quadratis* a b, b c. *Igitur rectangulum sub* a b, b c *bis, & compositum ex quadratis rectarum* a b, b c, *sunt* δ *incommensurabilia inter se. Ergo compositum ex quadratis* a b, b c *una cum rectangulo* a b c *bis,* ε *id est, quadratum* a c ζ *incommensurabile est rectangulo* a b c *bis sumto. Sed eidem* a b c *rectangulo bis, est commensurabile ipsum semel.* η *Igitur quadratum ex* a c *est incommensurabile rectangulo* a b c. *Sed* a b c *rectangulum ponitur Rationale. Ergò quadratum* a c *est* θ *Irrationale, ipsaq;* a c κ *Irrationalis. Vocetur autem ex* Binis Mediis prima *vel* Bimediale prius.

β 10. X.
γ 16. X.
δ 14. X.
ε 4. II.
ζ 17. X.
η 13. X.
θ 10. def. X.
κ 11. def.

LEMMA.

Quod sub Linea Rationali *a b* & Irrationali *b c* continetur rectangulum, Irrationale est.

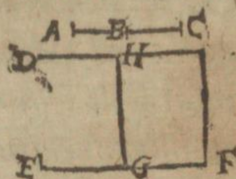


Sin minus, ipsum Rationale ad Rationalem a b *applicatum,* α *faciet latitudinem* b c *Rationalem contra hypothesin.* α 21. X.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 27.

Si duæ Mediæ *a b*, *b c* potentia tantum commensurabiles *a* componantur, quæ Medium contineant; tota
α 29. X.
a c Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secunda.



β 45. I.
β *Exposita Rationali* d e, *applicetur rectangulum* d f *æquale quadrato*, a c; *& composito ex quadratis* a b, b c *æquale sit* d g. γ *Erit itaq;* h f *æquale bis sumto rectangulo* a b c. *Quod cum sit* δ *Medium*; ε *erit &* h f *ipsius duplum medium. Et quia quadrata mediarum* a b, b c *commensurabilia sunt potentia, etiam ex ipsis compositũ rectangulũ* dg *utrivis ipsorum* ζ *commensurabile erit. Sed utrumq; quadratum ex Medijs est Medium. Ergò &* d g *erit Medium: Quoniam ergò* d g, h f *Media ad* d e *Rationalẽ applicãtur*, η *erunt latitudines eorum* eg, g f *Rationales ipsi* d e *longitudine incommensurabiles. Rursus quia longitudine incommensurabiles sunt* a b, b c, *&* θ *est, ut* a b *ad* b c, *ita quadratum* a b *ad rectangulũ*, a b c; κ *erunt, quadratũ* ab *& rectang.* a b c *longitudine incommensurabilia.*

γ. 4. II.
δ ex hypothesi.
ε cor. 24. X
ζ 16. X.
η 23. X.
θ 3. Lem. 19. X.
κ 10. X.

Sed

Sed quadrato a b *compositum ex* a b, b c *quadratis, & rectangulo* a b c *solum duplũ ostensum est commensurabile.* λ *Ergò compositum ex quadratis* a b, b c *id est* d g *incommensurabile est* λ 14. X.
bis sumto rectangulo a b c *id est* h f. μ *Est verò* μ 1. VI.
ut d g *ad* h f, *ita* e g *ad* g f. ν *Sunt itaq;* e g, g f *longitudine incommensurabiles. Quæ cum sint ostensæ Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles, & composita* e f, ν *ir-* ν 37. X.
rationalis. ξ *Est itaq; rectangulum* d f *sub Ra-* ξ Lemma
tionali d e *&* e f *irrationali, irrationale &* 38. X.
ipsi æquale quadratum a c *irrationale, ipsaq;* a c *irrationalis. Hæc vocetur ex Binis mediis, vel Bimediale posterius.*

LEMMA.

Si Recta linea *a d* non secetur bifariam in *b*, erit compositum ex quadratis partium *a b*, *b d* majus, quàm Rectangulum sub partibus *a b*, *b d* bis comprehensum, quadrato ejus lineæ *a c* qua major pars *a b* minorem *b d* superat.

A——C——B——D *Quoniam quadrata* ab, b c α *æqualia* α 7. II.
sunt rectangulo a b c *bis sumto, cum quadrato & a c; estq;* b c *ipsi* b d *æqualis, erunt quoque quadrata* a b, b d *æqualia rectangulo* a b d *bis*

sumto unà cum quadrato a c: *Quare ex* a b, b d *quadrata majora sunt rectangulo* a b c *bis sumto quadrato* a c. *Quod erat propositum.*

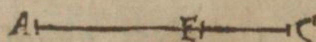
Corollarium.

Quadrata partium inæqualium simul majora sunt rectangulo bis sub partibus inæqualibus contento.

PROPOSITIO XL.

Theorema 28.

α 34. X. Si α duæ rectæ *a b, b c* potentia incommensurabiles componantur; quæ faciant compositũ quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota *a c* recta linea irrationalis erit. Vocetur autem Major.



Quia a b c *rectangulum ponitur Mediũ, ej9 etiam duplum* β *erit Medium & Irrationale.* β Cor. 24. X. *Sed compositum ex quadratis* a b, b c *ponitur Rationale: Bis ergò sumtum* a b c *rectangulum illi*

illi est $^{\gamma}$ *incommensurabile. Quare & rectangulum* a b c *bis cum quadratis* a b, b c, *id est* $^{\delta}$ *quadratum* a c $^{\epsilon}$ *incommensurabile est composito ex quadratis* a b, b c. *Cum autem compositum ex quadratis, ponatur rationale erit* $^{\zeta}$ a c *quadratum irrationale,* $^{\eta}$ *ipsaque* a c *recta irrationalis, quæ vocetur* Major : *Quia cum possit duo quadrata ex* a b, b c *& rectangulum* a b c *bis, compositum ex quadratis* a b, b c $^{\theta}$ *majus est rectangulo* a b c *bis. Quare cum compositum ex quadratis sit* Rationale, *&* a b c *rectangulum* Medium, *rectè dicitur* a c *Major, siquidem à Rationali, quod majus est, convenit imponere nomen.*

γ 10. X.
δ 4. II.
ε 17. X.
ζ 10. def.
η 11. def.
θ Lemma 39. X.

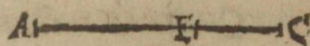
PROPOS: XLI.

Theorema 29.

α 35. X.

Si $^{\alpha}$ duæ rectæ lineæ *ab*, *bc* potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidē ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea *a c* irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

Quo-



Quoniam compositum ex quadratis a b, b c *est Medium, rectangulum verò* a b c *bis sumtum Rationale*, β *erit compositum ex quadratis incommensurabile rectangulo bis sumto. Igitur & compositum ex quadratis cum bis sumto rectanguli* γ *id est, quadratum* a c δ *erit duplo rectangulo* a b c *incommensurabile. Cum autem duplum rectanguli* a b c *sit Rationale*, ε *erit* a c *quadratum irrationale, ipsaq;* a c ζ *irrationalis*, *Quæ vocetur*, Rationale ac Medium potens, *quia potest Medium ex quadratis* a b, b c *compositum, & Rationale scilicet bis sumtum rectangulum* a b c. *Verum Rationale anteponitur irrationali quod natura sit prius, utut ordine hîc sit posterius.*

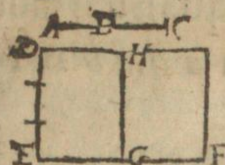
β 10. X.
γ 4. II.
δ 17. X.
ε 10. def.
ζ 11. def.

PROPOSITIO XLII.

Theorema 30.

α 36. X.

Si α duæ lineæ rectæ *ab*, *bc* potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarũ: tota recta linea *ac* irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.



Iterum exponatur Rationalis d e, *ad quam* β *applicatum sit rectangulum* d f *æquale quadrato* a c; *&* d g *æquale composito ex quadratis* a b , b c, γ *eritq;* h f *æquale bis sumto rectangulo* a b c. *Quoniam igitur tam compositum ex quadratis* a b , b c *id est* d g, *quàm rectangulum* a b c *bis sumtum id est* h f *sunt Media,* δ *facient* d g, h f *applicata ad rationalem* d e *latitudines* e g, g f *Rationales longitudine incommensurabiles. Et quia compositum ex quadratis* a b, b c *id est* d g *incommensurabile ponitur rectangulo* a b c, *cujus duplum est* h f, ε *erunt* d g, h f *incommensurabilia.* ζ *Sed ut* d g *ad* h f, *ita* e g *ad* g f, η *erunt itaq;* e g, g f *rationales longitudine incommensurabiles vel potentia commensurabiles, adeoq; tota* e f, θ *irrationalis.* κ *Est ergò* d f *sub rationali* d e *& irrationali* e f *contentum irrationale, & quadratum ex* a c *illi æquale irrationale, ipsaq;* a c *irrationalis, quæ vocetur* Bina Media potens, *quia & compositum ex quadratis* a b, b c *& rectangulum* a b c *erant Media.*

β 45. I.
γ 4. II.
δ 23. X.
ε 13. X.
ζ 1. VI.
η 10. X.
θ 37. X.
κ Lemma 38. X.

LEMMA I.

Si recta linea *ab* in partes inæquales in *c* & *d* secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata par-

partium *a c*, *c b* magis inæqualiũ simul majora quadratis partium *a d*, *d b* minus inæqualium simul.

A—E—D—C—B

Bisecta a b *in* e, *cadit* d *punctum vel inter* e c, *vel inter* e a. *Primò cadat inter* e c. α *Quoniam* a c b *rectangulum cum quadrato* e c *æquale est quadrato* e b, *ut &* a d b *rectangulum cum* e d *quadrato eidem* e b *quadrato æquale, erunt, rectangulum* a c b *cum quadrato* e c, *& rectangulum* a d b *cum quadrato* d e *æqualia. Ablatis autem inæqualium rectarum* e c, e d *quadratis, cum quadratũ* e c *sit majus quadrato* e d, *reliquum rectangulum* a c b *minus erit reliquo* a d b, *& propterea bis sumtum* a c b *rectangulum, bis sumto* a d b *erit minus. Sed quadratum* a b *tàm rectangulo* a c b *bis cum quadratis* a c, c b, *quàm rectangulo* a d b *bis cum quadratis* a d, d b *est* β *æquale: Sunt ergò æqualia rectangulum* a c b *cum quadratis* a c, c b *& rectangulum* a d b *cum quadratis* a d, d b: *& cum* a c b *sit minus quàm* a d b, *erunt residua quadrata* a c, c b, *majora quadratis* a d, d b *Quod erat propositum.* *Deinde cadat* d *intra* a e. *Quoniam* a c, c b *partes magis sunt inæquales quàm* a d, d b, *erit* a d *major quàm* c b, *ac proinde cum* a e, e b *sint æquales, erit* e c *reliqua major reliqua* e d. *Itaq; quia rectangulum* a c b *cum quadrato* e c *quadrato*

α 5. II.

β 4. II.

drato ex e b *α æquale est, itemq;* a d b *rectangulum cum quadrato* e d, *æquale eidem quadrato* e b *erit* a c b *rectangulum cum quadrato ex* c e *æquale rectangulo* a d b *cum quadrato* e d. *Ergò ut prius* a c, c b *quadrata, majora sunt quadratis* a d, d b.

PROPOSITIO XLIII.

Theorema 31.

Quæ *a b* ex binis nominibus, ad unum duntaxat punctum *c* dividitur in nomina *a c, c b.*

A———D—C—B

Si potest in duas alias Rationales potentia tantùm commensurabiles juxta 37 X *dividi, fiat illa divisio in* d. *Neq;* c *neq;* d *dividit lineam* a b *æqualiter, quia ita æquales etiam commensurabiles essent longitudine* a d, d b *contra hypothesin, sed partes inæquales* a c, c b *vel magis vel minus inæquales sunt partibus* a d, d b *α atq; ita quadrata* a c, c b *sunt vel minora vel majora quadratis* a d, d b. *Quia verò si ab æqualibus demantur inæqualia, residuorum excessus est ablatorū excessui æqualis. β Sunt autem ex* a c, c b *quadrata cum rectangulo* a c b *bis sumto; æqualia quadratis* a d, d b, *cum* a d b *rectangulo bis sumto, sit ut qui fuerit excessus compositorum ex quadratis,*

α Lemma 42. X.

β 4. II.

idem

idem sit bis sumtorum rectangulorum: Sed excessus compositorum ex quadratis est spacium Rationale(γRationalium enim a c, c b quadrata & ex ipsis δ compositum sunt Rationalia; itemq; & ex a d, d b quadrata unà cum suo composito sunt rationalia. ε Cum ergò Rationale superet Rationale rationali, manifestum est rationalem esse excessum compositorum ex quadratis) Igitur & excessus rectanguli a c b & a d b quolibet bis sumto, est spacium Rationale. Sed a c b rectangulum est ζ Medium. Ergò & duplum, sicut & a d b rectangulum. η Cum verò Medium non superet medium Rationali; non potest excessus rectangulorum esse Rationale, quod tamen in præcedentibus concludebatur. In alio itaq; puncto quàm c secari a b in sua nomina impossibile est.

γ 8. 9. Def. δ 34. X.

ε 27. X. Schol.

ζ 22. X.

η 27. X.

PROPOSITIO XLIV.

Theorema 32.

Quæ ex binis medijs prima *a b*, ad unum duntaxat punctum *d* dividitur in nomina *a d*, *d b*.

Dividatur, si potest, in alia ad c *nomina vel duas Medias potentia commensurabiles, quæ comprehendant Rationale juxta 38. hujus. Pari hîc ratione, ut in præcedenti propositione erit idem exces-*

A———D—C—B

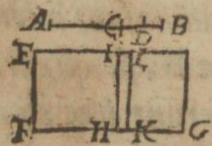
excessus rectangulorum a b c *&* a d b *bis, qui compositorũ ex quadratis* a c, c b *&* ad d b. *Sed Rationalium rectangulorum bis excessus* α *est Rationale spacium. Ergò & excessus compositorum ex quadratis & spacium Rationale. Cum verò* a d, d b *sint Mediæ, & potentia commensurabiles, erunt & eorum quadrata Media & commensurabilia, atq; ita ex ipsis compositũ utrumq; erit &* β *commensurabile &* γ *Medium. Cum verò medium* δ *non superet Mediũ rationali. Itaq; excessus compositorũ ex quadratis non erit Rationale spacium, quod tamen modo concludebatur. In alio itaq; puncto quàm* c *secari* a b *in sua nomina est impoßibile.*

α 2. Scholi. 27. X.
β 16. X.
γ 24. X.
δ 27. X.

PROPOS: XLV.

Theorema 33.

Quæ ex binis Mediis, Secunda *a b*, ad unum duntaxat punctum *c* dividitur in nomina *a c*, *b c*.



Dividatur, si potest in alia ad d, *ut respondeant sensui 39. hujus. Vbicunq; ergò sit* d, *ut in 43. ostenditur, quadrata ex* a c, c b *vel majora vel minora sunt quadratis* a d, d b. *Exponatur autem Rationalis* e f, *ad quam* α *applicetur* e g *rectang. æquale*

α 45. I.

æquale quadrato a b, *&* e h *æquale quadratis* a c,
β 4. II. c b, *&* e k *quadratis ex* a d, d b. β *Erit ergò*
i g *æquale duplo rectanguli* a c b *&* l g *æquale duplo rectanguli* a c b *&* l g *æquale duplo rectanguli* a d b. *Et quia quadrata ex* a c, c b *quadratis* a d, d b γ *sunt inæqualia, etiam rectangula*
γ Lemma 39. X.
δ 1. VI. e h, e k *erunt inæqualia:* δ *quare & recta* f h, f k *sunt inæquales. Rursus, quia quadrata ex* a c, c b *sunt majora rectang.* a c b *bis, erit* e h *majus ipso* i g, *atq; ita* f h *major dimidio ipsius* f g, *quod de* f k *ostendetur. Quare* b g, f h, h g *sunt partibus* f k, k g *inæquales singulis singulæ. Quia verò* a c, c b *sunt Mediæ potentia commensurabiles, erunt etiam ipsarum quadrata media & commensurabilia,* ε *adeoq; compositum ex ipsis utriq; ipsorum commensurabile; ideoq; &* e h, *&* e k ζ *sunt*
ε 16. X.
ζ cor. 24. X *media. Cumq; ita* e f *sit Rationalis,* η *erunt* f h,
η 23. X. f k *Rationales longitudine ipsi incommensurabiles. Sic etiam rectanguli* a c b *Medij duplum* i g *erit medium &* h g *Rationalis longitudine incommensurabilis; perinde ut &* l g *Medij,* k g *Rationalis longitudine incommensurabilis ipsi* e f *ostendetur. Rursus quia* a c, c b *longitudine sunt incommensurabiles, & est,* θ *ut* a c *ad* c b, *sic quadra-*
θ 3. Lem. 19. X. *tum* a c *ad rectangulum* a c b, κ *erunt hæc etiam*
κ 10. X. *incommensurabilia. Sed quadrato* a c *compositum ex quadratis* a c, c b *est commensurabile, ut antea constat; & rectangulo* a c b *suum duplum est commensu-*

mensurabile. λ *Itaq; compositum ex quadratis* a c, c b, *id est*, e h *est incommensurabile duplo rectanguli* a c b, *id est*, i g. δ *Sed ut* e h *ad* i g, *ita* f h *ad* h g. κ *Sunt ergo* f h, h g *longitudine incommensurabiles. Cum verò etiam sint Rationales, erunt Rationales potentia solùm commensurabiles.* μ *Tota ergo* f g *est Irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur, divisaq; in nomina ad punctum*; ν *nec potest* f g *in alio puncto ut* k *dividi in alia nomina. Itaq; nec* a b *bimediale posterius in alio puncto quàm* c *dividi potest in nomina.* λ 14. X. μ 37. X. ν 43. X.

PROPOSITIO XLVI.

Theorema 34.

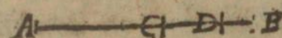
Major *a b* ad unum duntaxat punctum *c* dividitur in nomina *ac, cb*.

A———C-D-B *Si potest, dividatur in* d *in nomina, qualia* 40. *propo. requirit.* α *Erit excessus quadratorum* a c, c b *&* a d, d b *idem cum excessu rectangulorum* a c b *dupli &* a d b *dupli. Sed excessus duorum compositorum ex quadratis binis est spacium Rationale. Igitur & excessus rectangulorum binorum. Sed rectangulum* a c b *ponitur Medium*; β *ideoq; duplum ipsius etiam est Medium; eodemq; modo &* a d b β *Mediū erit.* γ *Sed Mediū non superat Medium Rationali. Itaq; excessus binorum rectangulorum non erit spacium Rationale, quod tamen antea sequebatur. Non ergò in alio quàm* c *puncto secabitur Major.* α 43. X. β cor. 24. X. γ 27. X.

PROPOS: XLVII.

Theorema 35.

Rationale ac Medium potens *ab* ad unum duntaxat *c* punctum dividitur in nomina *ac*, *cb*.



Si potest, dividatur in nomina, qualia 41. propos. requirit. α 43. X. *Erit excessus quadratorum* a c, c b *&* a d, d b *idem cum excessu rectangulorum* a c b, *&* a d b *duplorum. Qui excessus in rectangulis est spacium Rationale. Ergò & in compositis quadratorum. Quæ composita ex quadratis;* β 27. X. a c, c b, *&* a d, d b *cum ponantur Media.*β *Itaq;* *excessus non potest esse spacium Rationale, ut jam sequebatur, Non ergò in alio quàm* c *puncto secabitur Rationale & Medium potens.*

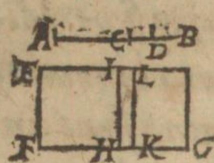
PROPOS: XLIIX.

Theorema 36.

Bina Media potens *ab*, ad unum duntaxat punctum *c* dividitur in Media nomina. *ac*, *cb*.

Si potest, dividatur in d *in nomina, qualia requirit 42. hujus. Cõstructione adhibita eadem, quæ*

in



in 45. patet, partibus f h, h g, *partes* f k, k g *singulis singulas esse inæquales. Cum ergò compositũ ex quadratis* a c, c b *ponatur Medium, erit & e h Medium, cumq; rectanguli* a c b *duplum sit Mediũ, erit & i g Medium:* α *Eruntq;* f h, h g *Rationales longitudine incommensurabiles ipsi* e f *ut &* f k *&* k g. *Cum verò compositũ ex quadratis* a c, *&* c b *id est,* e h β *sit incommensurabile rectanguli* a c b *duplo, id est,* γ i g, *sitq; ut* e h *ad* i g *ita* f h *ad* h g, γ *erunt & hæ* δ *longitudine incommensurabiles. Cumq; sint ostensæ Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles, totaq;* f g *Irrationalis est ex binis nominibus, divisa in* h *puncto in nomina. Sed eodem modo dividi eã non patitur 43. in puncto* k. *Igitur nec* a b *in alio puncto quàm* c *dividitur in nomina. Quod erat propositum.*

α 23. X.
β ex hypothes.
γ 10. X.
δ 37. X.

Definitiones secundæ.

Iam investigat autor omnia binomia, quorum sex habet ideò. Quia enim Nomina Binomij sunt duæ Rationales, quæ nequeunt ambæ esse expositæ Rationali commensurabiles, nisi ipsæ quoq; velint esse longitudine inter se commensurabi- α *les*

α 12. X.

les, vel una tantùm sive Major sive Minor, vel neutra tria sunt genera binomiorum. Quoniam etiam Nomina sunt inæqualia, poterit majus minore plus quadrato vel longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Vnde si plus possit quadrato longitudine commensurabilis unà cum dictis tribus generibus tres diversæ lineæ binomiales; Sed si plus quadrato longitudine incommensurabilis, cum ijs tribus, itidem tres oriuntur.

Exposita ergò Rationali, & quæ ex binis nominibus divisa in nomina, cujus majus nomen plus possit quàm minus quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

1. Si majus nomen expositæ Rationali cõmensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus prima.

2. Si minus nomen expositæ Rationali commensurabile sit lõgitudine, vocetur ex binis nominibus secũda.

3. Si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali, vocetur ex binis nominibus Tertia.

Rursus

Rursus si majus nomen plus possit quàm minus quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

4. Si majus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus quarta.

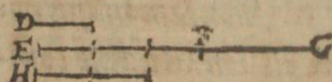
5. Si verò Minus nomen, vocetur Quinta.

6. Quod si neutrum ipsorum nominum: vocetur sexta.

PROPOSITIO XLIX.

Theorema 13.

Invenire ex binis nominibus primam.



α *Inventis duobus numeris* a b, c b, *quorum excessus* a c *non sit quadratus, ita ut* a b, c b *proportionem habeant numeri quadrati ad quadratum* a b, a c *non. Exponatur autẽ Rationalis* β *quæpiam* d, *cui*, e f *sumatur longitudine cõmensurabilis, quæ* e f *ob id quoq; Rationalis erit. Fiat deinde ut* a b *ad* a c *ita quadratũ* e f *ad quadratũ* f g. *Erit eg ex binis nominib.*

α 2. Scholi. 29. X.

β cor. 6. X.

Quoniam quadrata e f, f g *sunt* γ *commensurabilia, erunt ipsæ rectæ etiam commensurabiles solùm potentia. Sed* e f *est Rationalis. Ergò &* f g.

γ 6. X. *Quia verò* a b *ad* a c *non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum, etiam*

δ 9. X. *quadrata* e f, f g *non habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum.* δ *Sunt ergò*

ε 37 X. e f, f g *longitudine incommensurabiles; atq; ita Rationales potentia solum commensurabiles; ipsaq;* e g ε *irrationalis, quæ ex* binis nominibus *dicitur. Erit etiam* prima. *Cum sit ut numerus* a b *ad* a c *ita quadratum* e f *ad quadratum* f g, *sit etiam* a b *maojr quàm* a c, *etiam quadratum* e f *erit majus quadrato* f g ζ *& quidem quadrato* h.

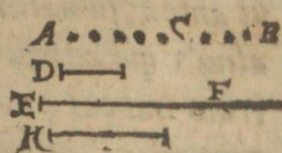
ζ Lemma 14. X. *Quia ergò est, ut* a b *ad* a c, *ita quadratum* e f *ad quadratum* f g; *etiam convertendo erit, ut* a b *ad* c b, *nempe ad excessum, quo antecedens* a b *superat consequentem* a c, *ita quadratum* e f *ad quadratum* h. *Habet autem* a b *ad* c b *rationem quam quadratus numerus ad quadratum; Itaque & quadrata* e f *&* h; *eruntq; commensurabiles longitudine* e f, *&* h. *Quoniam majus nomen* e f *expositæ Rationali* d *est longitudine commensurabile, ut patet; & potest plus quàm minus* f g *quadrato rectæ* h *sibi longitudine commensurabilis: erit* e g *per defin.* ex binis nominib. prima.

PROPOS: L.

Problema 14.

Inven-

Invenire ex binis nominibus secundam.
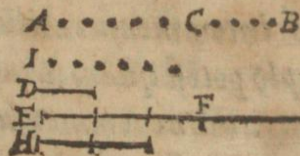


Repertis duobus a b, c b *quadratis, sumtaq;* d *Rationali. cui longitudine commensurabilis sit* f g, *quæ ideo est Rationalis,* α *Fiat ut* a c *numerus ad* a b, *ita quadratum* g f *ad quadratum* f e: *Erit eodem modo ut in præcedenti* e g binomialis. *Quæ & erit* secunda. *Cum enim sint ut* a c, a b, *Quadrata rectarum* g f, f e; *etiam sunt convertendo ut* a b *ad* a c *ita quadratum* e f *ad* f g. *Sed* ab *quàm* a c *est major, erit ergò quadratum* e f *majus quadrato* f g, β *& quidem sit quadrato rectæ* h. *Iterum hîc ut in præcedenti ostendetur* h *ipsi* e f *longitudine commensurabilis esse. Quoniam ergò majus nomen* e f *plus potest quàm minus* f g *expositæ Rationali* d *longitudine commensurabile, ut patet ex priorbus, quadrato rectæ* h *sibi longitudine commensurabilis*: *Erit* e g ex binis nominibus *per defin.* secunda.

α Cor. 6. X.

β Lemma 14. X.

PROPOSITIO LI.

Problema 15.



Invenire ex binis nominibus tertiam.

A . . . . . C . . . . B
I . . . . . .
D ———
E ——— ——— F ——— G
H ———

Repertis duobus quadratis a b, c b *ut anteà, sumatur alius* i *qui ad neutrum habeat proportionem quam quadratus ad quadratum. Assumta* d *rationali* α *fiat, ut* i *ad* a b, *ita quadratum rectæ* d *ad quadratum* e f, *quæ quadrata* β *erunt commensurabilia, cum habeant proportionẽ numerorum: Sed cum non quadratorum* γ *erunt* d *&* e f *longitudine incommensurabiles. Fiat rursus ut* a b *ad* a c, *ita quadratum* e f *ad quadratum* f g, *quæ etiam* β *erunt commensurabilia; sed latera ipsa* γ *incommensurabilia. Sunt ergò* e f, f g *Rationales potentia tantùm commensurabiles, & tota* e g δ irrationalis ex binis nominib9. *Quæ & erit* tertia, *Quia enim* δ, *ut* i *ad* a b, *ita quadratum* d *ad quadratum* e f. *Sed* i *ad* a b *non est ut numerus quadratus ad quadratum. Ergò nec* d *ad* e f, *& sunt longitudine* γ *incommensurabiles. Quia etiam est ut* a b *ad* a c, *ita quadratum* e f, *ad quadratum* f g; *Sed* a b *major est quàm* a c, *etiam* e f *erit majus* f g. ε *Sit autem majus quadrato rectæ* h. *Erit ut quartus* h *ipsi* e f *longitudine incommensurabilis. Quoniam majus nomen* e f *pl9 potest quàm min9* f g *quadrato rectæ* h *sibi longitudine commensurabilis, & neutrum* e f, g f *exposita Rationali*

α Cor. 6. X.
β 6. X.
γ 9. X.
δ 37. X.
ε Lemma. 14. X.

d est

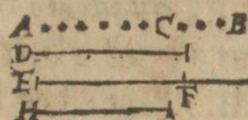
d est longitudine commensurabile. Erit ergò e g *per def.* ex binis nominibus tertia.

Binomia secunda & tertia inveniuntur facilius si similes plani numeri à se mutuò auferantur; reliquus enim vel est quadratus, & oritur binomium secundum, vel non quadratus, & oritur binomium tertium.

PROPOS: LII.

Problema 16.

Invenire ex Binis nominibus Quartam.



a Inventis duobus numeris ac, c b *ex quibus compositus* a b *ad neutrum ipsorum habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum, & assumta rationali* d, *cui longitudine commensurabilis sit* e f *perficianturq; cætera ut in 49. hujus. Erit ut ibi* e g ex binis nominibus *: & quidem* Quarta. *Majus sit quadratum* e f *quàm* f g *quadrato* h. *Quia autem convertendo est, ut in 49. ut* a b *ad* c b, *ita quadratum* e f *ad quadratum* h. *Sed* a b *ad* c b *non est ut quadratus ad quadratum: Ergò nec quadrata* e f, *&* h *habebunt proportionem quadratorum; β eruntq; rectæ* e f *&* h *incommensurabiles. Itaq; cum majus nomen* e f, *quod & expositæ rationali* d *commensurabile est, plus possit quàm minus* f g *quadrato rectæ* h *sibi longitudine incommensurabilis, erit* e g *per defin. ex* binis nominibus quarta.

a 35. schol. 29. X.

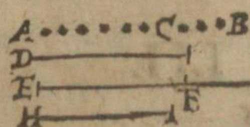
β 9. X.

Propos.

PROPOS: LIII.

Problema 17.

Invenire ex binis nominibus quintam.
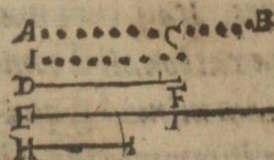


Inventis numeris a c, c b *ut in præcedenti, & adhibitis reliquis ut in* 50. *hujus* : *Erit* c g *ex binis nominibus & quidem Quinta.* *Sit quadratum* e f *majus quàm quadratum* f g, *quadrato* h. *Erit, ut in* 49. *convertendo, ut* a b *ad* c b, *ita quadratum* e f *ad quadratum* h. *Erunt* e f *&* h *incommensurabiles ut in* 52. *Quia ergò majus* e f *nomen quàm minus* f g, *quod & propositæ rationali commensurabile est, plus potest quadrato rectæ* h *sibi longitudine incommensurabilis, erit per defin.* e g *ex* binis nominibus quinta.

PROPOS: LIV.

Problema 18.

Invenire ex binis nominibus sextam.



Inventis a c, c b *planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, nec ex ipsis compositus quadratus sit, habeatur ad aliquem eorum quadra-*

dratorum proportionem; sumatur aliꝰ quicunq; *numerus* i, *qui nec ad* ab, *nec ad* ac *quadratorum proportionem habeat, qualis est quivis quadratus; assumtaque rationali* d, *fiant cætera ut in 51. hujus. Patet ut ibi* ef, fg *longitudine esse incommensurabiles & totam* eg, ex binis nominibus. *Et quidem est* sexta. *Quia, si quadratum* ef *quàm quadratum* fg *majus sit quadrato* h, *ut in 52.* ef *&* h *sunt longitudine incommensurabiles. Itaq; cum majus nomen* ef *plus posit quàm* fg, *quorum neutrum positæ rationali sit commensurabile, quadrato rectæ* h *sibi longitudine incommensurabilis, erit* ex binis nominibus *per defin.* sexta.

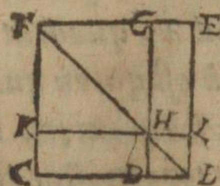
Sæpè promtius Binomia quinta & sexta occurrunt, si dissimiles plani à se invicem auferantur, reliquum vel quadratus est & oritur binomium quintum, vel non, & nascitur binomium sextum.

LEMMA.

Si recta linea *bc* secta sit utcunq; in *d*; erit rectangulum *eh* sub partibꝰ *el*, *lh* contentum, medium proportionale inter earum quadrata *ld*, *gk*; item rectangulum *de* contentum sub tota & una parte, medium proportionale inter quadratum *ce*, totius lineæ, & quadratum *dl* dictæ partis.

De-

Descripto quadrato c e *super* b c, *è sectionis puncto* d *erigatur perpendicularis* d g *ducaturq́; diagonius* b f, & l k *parallela ipsi* b c. Erit e h medium proportionale inter g k, l d quadrata.



α 1. VI. α *Quia ergo est ut* k h, *ad* h l; *ita tam* g k *ad* e h, *quàm* c h *ad* d l, *erit, ut* g k *ad* e h, *ita* c h *ad* d l. *Sed*

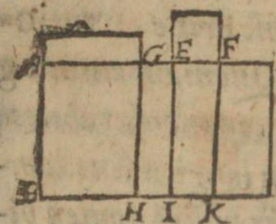
β 43. I. c h & e h *sunt æqualia. Est ergò rectangulum sub partibus medium proportionale inter earundem partium quadrata. Rursus* α *quia est ut* c b *ad* b d, *ita tam* c e *ad* d e, *quàm* c l *ad* d l. *Sed* d e & c l β *sunt æqualia. Est ergò rectangulum* d e *sub tota & una parte, Medium proportionale inter quadratum totius* c e & *dictæ partis quadratum* d l.

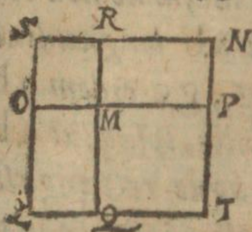
PROPOSITIO LV.

Theorema 37.

Si ſpacium *a c* contineatur ſub Rationali *a b*, & ex binis nominibus prima *a d*; Recta linea *o p* ſpacium potens irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

Divi-





Divisa a d *in nomina* a e *majus & e d minus, secetur* e d *in* f *bifariam.* α *Quia ergò* a e *plus potest quàm* e d *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabiles. Si ad eam quartæ parti quadrati* e d *i.e. quadrato* e f *æquale Parallelogrammũ* a g e β *applicetur*, γ *dividet ipsam* a e *in partes* a g, g e *longitudine commensurabiles. Per puncta* g e f *ducantur ipsi* a b *parallelæ* g h, e i, f k δ *fiantq;* a h, g i *rectangulis æqualia quadrata* l m, m n *juncta ad angulum* m *ita, ut* o m, m p *unam efficiant rectam & compleatur totum* l n *quadratum. Quoniam itaque rectangulum* a g e ε *æquale est quadrato* e f, ζ *erit ut* a g *ad* e f, *ita* e f *ad* g e; η *quare ut* a h *ad* e k, *ita* e k *ad* g i. *Est itaque* e k *inter* a h, g i *medium proportionale. Sed ipsis* a h, g i *sunt æqualia* l m, m n *quadrata,* θ *inter quæ medium proportionale est* t m. *Itaque* t m *est æquale ipsi* e k. *Cum itaque* t m *sit* κ *æquale* m s λ *& e k ipsi* f c, *erit & m s ipsi* f c *æquale, totumque* l n *quadratum toti rectangulo* a c *æquale, & o p potest spacium* a c *sub Rationali* a b *&*

bino-

α def. bin. primi.
β 2. Lem. 17. X.
γ 18. X.
δ 14. II.
ε ex constr.
ζ 17. X.
η 1. VI.
θ Lemma præcedens.
κ 43. I.
λ 36. I.

binomiali prima a d *contentum. Erit ea* irratio- nalis ex binis nominibus. *Quoniam enim* a g g e *ostensæ sunt longitudine commensurabiles,*
μ 16. X. μ *erit* a e *tota utrique ipsarum longitudine commensurabilis. Sed* a e, *cum sit majus nomen binomialis primæ* a d, *rationali* a b *longitudine est commensurabilis. Ergò* a g, g e *eidem* a b *longitudine sunt commensurabiles, ipsæq; ut* a b
ν 20. X. *erunt Rationales.* ν *Sunt itaque rectangula* a h, g i *sub rationalibus rationalia, ipsisq; æqualia quadrata* l m, m n *rationalia, rationalesq; rectæ* o m, m p. *Et quia* a e *ipsi* e d *est longitudine incommensurabilis; sed eidem* a e *longitudine commensurabilis ostensa est* a g, *& ipsi* e d *longitudine commensurabilis est* e f, *utpote i-*
ξ 14. X. *psius dimidia.* ξ *Ergo* a g, e f *sunt longitudine*
ο 1. VI. *incommensurabiles. Quare* a h, e k, ο *ejusdem*
π 10. X. *rationis cum* a g, e f π *incommensurabilia erunt, & proinde* l m, m t *ipsis æqualia incommensurabilia, ipsæq; rectæ* o m, m p ο *eandem habentes rationem quam* l m, m t, *erunt longitudine incommensurabiles. Cum autem eædem sint ostensæ rationales. Igitur* o m, m p *sunt rationales potentia solùm commensurabiles. Quare* o p *potens spacium* a c *est* irrationalis *quæ* ex binis nominibus *dicitur.*

Sed Euclides noluit aliquam binomialium speciem determinare, cum posit & prima & secunda, & tertia, quarta, quinta, sexta, esse.

Sequen-

Sequentibus propositionibus quinq; docentur inventiones omnis generis Irrationalium linearum.

PROPOS: LVI.

Theorema 38.

Si spacium *ac* contineatur sub Rationali *ab*, & ex binis nominibus secunda, *ad*, Recta linea *op* spacium potens, Irrationalis est, quæ ex binis medijs prima appellatur.

Divisa a d *in nomina* a e *majus, &* e d *minus adhibeatur etiam reliqua præcedentis propositionis constructio. Erit* o p *ex binis medijs prima. Quoniam enim* a e, e d *sunt longitudine incommensurabilia, &* e d *rationali* a b *longitudine commensurabile, α erunt* a e, a b *longitudine incommensurabiles. Et quia* a g, g e *in præcedenti sunt ostensæ commensurabiles longitudine, tota* a e *utriq; ipsarum erit β commensurabilis. Quare cum* a e *ceu majus nomen binomialis secundæ* a d *sit linea Rationalis, erunt &* a g, g e *rationales longitudine commensurabiles. Sed* a e *rationali,* a b *est longitudine incommensurabilis. Vtraq; ergò* a g, g e, *eidem* a b *incommensurabilis γ erit longitudine. Quare tam* a b, a b *quàm* a g, g e *rationales sunt potentia tantum commensurabiles, & re-*

α 13. X.

β 16. X.

γ 14. X.

ctangula a h, g i *Media, ipsisq; æqualia quadrata* l m, m n *Media & o m, m p rectæ mediæ.*

δ 22. X. *Quia autem* a g, g e *sunt longitudine commensurabiles,* ε *erunt* a h, g i *ejusdem rationis, ipsisq; æqualia quadrata* l m, m n *commensurabilia, adeoq;* o m, m p *rectæ potentia tantùm commensurabiles. Cumq;* a e, e d, *sint longitudine incommensurabiles, quibus longitudine sunt commensurabiles ostensæ* a g, e f: *Ergò* a g, e f *sunt longitudine incommensurabiles, cum quibus in eadem ratione* a h, e k, *etiam sunt* ε *incommensurabilia, & ipsis æqualia* l m, m t *incommensurabilia; ipsæq;* ζ *rectæ ejusdem rationis* o m m p *longitudine sunt incommensurabiles. Sunt itaq;* o m, m p Mediæ & potentia commensurabiles. *Quia autem* e d *minus nomen, binomialis secundæ* a d, *est commensurabile longitudine* Rationali a b *vel* e i, *etiam ipsius dimidium* e f *commensurabile est ipsi* e d; *&* e i, e f η *commensurabiles sunt longitudine. Sed* e i *est Rationalis. Ergò &* e f *&* e k *rectang.* θ *rationale. Sed* m t *sub* o m, m p *contentum ipsi* e k *est æquale. Ergò &* m t *est rationale. Quare* o m, m p *sunt Mediæ potentia solùm commensurabiles, Rationaleq; continentes; adeoq;* o p Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima κ *appellatur.*

ε 10. X.

ζ 1. VI.

η 12. X.

θ 20. X.

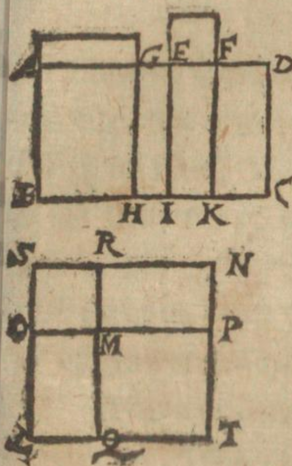
κ 38. X.

PRO-

PROPOS: LVII.

Theorema 39.

Si spacium *a c* contineatur sub Rationali, *a b* & ex binis nominibus tertia *a d*; Recta linea *o p* spacium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis Secunda dicitur.



Divisa a d *in nomina* a e *majus &* e d *minus, reliqua fiant ut in 55. propos. Ostendetur eodem modo, ut ibi,* o p *posse spacium* a c; *& ut in 56. rectas* o m, m p *esse Medias potentia tantùm commensurabiles, eò quod* a e *ponitur rationali* a b *hic ut illic longitudine incommensurabilis. Sed quia* e d, e f *longitudine sunt commensurabiles, estq;* e d *rationalis* a b *longitudine incommensurabilis, α erit etiam* e f *eidem* a b, *id est,* e i *longitudine incommensurabilis. Sunt autem rationalis* e f *dimidia rationalis* e d *&* e i *potentia tantum commensurabiles. Quare* e k *β erit Medium, ipsiq; æquale* m t *medium, contentum sub Medijs* o m, m p. *Quare cum* o m m p *sint Mediæ potentia tantùm commensurabiles, contineantq; spacium Mediū, erit* o p Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda γ *appellatur.* α 14. X. β 22. X. γ 39. X.

PROPOS: LIIX.

Theorema 40.

Si spacium *ac* contineatur sub Rationali *ab*, & ex binis nominibus quarta *ad*: Recta linea *op* spacium potens Irrationalis est, quæ vocatur Major.

Divisa a d *in nomina* a e *majus & minus* e d, a19. X. *cætera fiant ut in 55 propos.* α *Erunt* a g, g e *longitudine incommensurabiles. Ostendeturq;* o p *posse spacium* a c. *Quoniam* a g, g e *sunt longi-* β 10. X. *tudine incommensurabiles,* β *&* a h, g i *rectangu-* γ 20. X. *la ejusdem cum illis rationis & ipsis æqualia qua-* δ 22. X. *drata* l m, m n *incommensurabilia erunt, & rectæ* o m, m p *potentia incommensurabiles. Sed quia majus nomen* a e *Rationali* a b *est longitudine commensurabile, erit ipsa* a e *rationalis & rectangulum* a i γ *rationale,* δ *&* e c *rectangulum Medium propter* e d *ipsi* a b *longitudine incommensurabilem, ipsiq;* e c *commensurabile* e k *Medium & huic æquale* t m *medium. Quare cum* o m, m p *sint incommensurabiles potentia, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis* l m, m n *rationale, rectangulumq; sub ipsis Medium, tota* ε40. X. o p ε *rationalis erit, quæ appellatur* Major.

PRO-

PROPOSITIO LIX.

Theorema 41.

Si spacium *a c* contineatur sub Rationali, *a b* & ex binis nominib. quinta *a d*; Recta linea *o p* spacium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

Divisa a d *in nomina* a e *majus &* e d *minus, fiunt cætera ut in 58. propos.* α *Erunt* a g, g e *longitudine incommensurabiles; &* o p *poterit* a c *ut in 58; quæ & Irrationalis erit, potens rationale & Medium. Erunt etiam ut in 58* o m, m p *potentia incommensurabiles. Ergò* a i *est* β *Mediū, quia nomē majus* a e *binomij quinti* a d *est incōmensurabile longitudine Rationali* a b *per defin. Sed* a i *quadratis* l m, m n *simul est æquale; Sunt ergò Media. Rursus rectangulū* e c *est Rationale, quia minus nomen* e d *longitudine cōmensurabile est Rationali* a b *ex definitione, ipsiusq; dimidiū* e f γ *Rationale & ipsi æquale* m t *Rationale, sub* o m, m p *contentum. Quare cū* o m, p m *sint potentia incommensurabiles, faciantq; ex ipsarum quadratis* l m, m n *compositum Medium, & rectangulum sub ipsis contentum* m t *Rationale; erit* o p δ *irrationalis, quæ Rationale & Medium potens dicitur,*

α 19. X.
β 22. X.
γ 10. X.
δ 41. X.

PROPOSITIO LX.

Theorema 42.

Si ſpacium *ac* contineatur ſub Rationali *ab*, & ex binis nominibus ſexta, *ad*, recta linea *op* ſpacium potens, Irrationalis eſt, quæ bina Media potens appellatur.

Diviſa a d *in nomina* a e *majus &* e d *minus, cætera fiant ut in* 55. α *Erunt* a g, e g *longitudine incommenſurabiles &* o p *poterit ſpacium* a c. *Erunt &* om, m p *potentia incommenſurabiles ut in* 58. *Compoſitum ex quadratis* l m, m n *erit Medium ut in* 59 : *& ut in* 58. m t *ſub* o m, m p *contentum, Medium. Quia verò duarum* a e, e f *rectarum, illa quidem longitudine eſt incommenſurabilis ipſi* e d ; *hæc vero commenſurabilis* ; β *erunt* a e, e f *longitudine incommenſurabiles, Ergò & in eadem cum his ratione* a i, e k, γ *ſunt incommenſurabilia. Quare & compoſitum ex* l m, m n *quadratis ipſi* a i *æquale, &* m t *ipſi* e k *æquale erunt incommenſurabilia. Quamobrē cum* o m, m p *ſint potentia incommenſurabiles, faciantq́ue & ex ipſorum quadratis* l m, m n *compoſitum Medium &* m t *ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileq́ue ex ipſarum quadratis compo-*

α 19. X.
β 13. X.
γ 10. X.

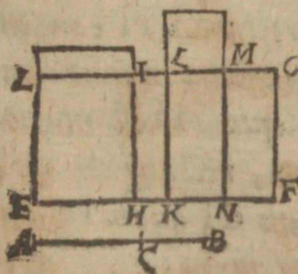
composito, erit tota op ^δ Irrationalis quæ bina Media potens *vocetur*. δ 42. X.

Porro docetur, quasnam Irrationales Latitudines faciant Irrationalium primo Senario propositarum, ad rationalem lineam applicata quadrata.

PROPOS: LXI.

Theorema 43.

Quadratũ ejus *a b*, quæ ex binis nominibus *a c, c b* ad rationalem *d e* applicatum *d f*, latitudinem *d g* facit ex binis nominibus *d l, l g* primam.



Applicato ad d e *rectangulo* d h *quadrato* a c *æquali & ad* i h *alio,* i k *quadrato* c b *æquali;* ^α *erit* l f *rectangulo* a c b *bis sumto æquale;* α 4. II. *Siq; ex puncto* m *inter* l g *medio agatur parallela* m n *ipsi* d e, *erit tam* l n *quàm* m f *æquale* a c b *rectangulo.* ^β *Quoniam itaq;* a c, c b *potentia sõlùm* β 47. X. *cõmensurabiles sunt, erunt eorum quadrata rationalia & commensurabilia, quorũ utriq; cum ex ijs compositum* ^γ *sit commensurabile, erit & quadra*- γ 16. X. *torũ* a c, c b *compositum* d k *Rationale, quod ad Rationalem* d e *applicatũ,* ^δ *facit latitudinem* d l *rationalẽ, ipsiq;* d e *longitudine commensurabilẽ.* δ 21. X.

ε 22. X. *Quia verò* a c, c b *sunt Rationales potentia tantum commensurabiles, rectangulum sub ipsis* ε *erit*
ζ cor. 24. X *Medium*, ζ *ejusq; duplum* l f *Medium*. η *Itaq;*
η 23. X. *Latitudo* l g *est Rationalis, ipsi* l k, *id est*, d e *longitudine incommensurabilis. Sed* d l *ipsi* d e *est*
θ 13. X. *ostensa longitudine commensurabilis*. θ *Ergò* d l, l g *longitudine sunt incommensurabiles, adeoq; ra-*
κ 37. X. *tionales potentia solùm commensurabiles*, κ *&* d g ex binis nominibus composita. *Erit etiam* Prima. *Quia enim* a c b *rectangulum in-*
λ cor. 54. X *ter quadrata* a c, c b λ *est medium proportionale, erit &* l n *inter* d h, i k *Medium proportionale*,
μ 1. VI. μ *&* l m *inter* d i, i l. ν *Itaq; rectangulum* d i l
ν 17. VI. *quadrato* l m *est æquale*: *Et cum quadrata* a c, c b *sint commensurabilia*, ξ *rectæ* d i, i l *eandem*,
ξ 10. X. *cum illis habentes rationem longitudine sunt commensurabiles*. ο *Et quia* d k *quam* l f *est majus*,
ο Lemma 59. X. *quadrataq;* a c, c b *rectarum, rectangulo* a c b *bis sumto sunt majora*, μ *etiam* d l *quàm* l g *erit major*. *Itaq; cum* d l *sit major quàm* l g, *&* d i l *rectangulum quadrato* l m *ostensum æquale, dividens rectā* d l *in* i *in partes longitudine commensurabiles, ut patet* ϖ *poterit* d l *major plus quàm*
ϖ 18. X. l g *minor quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis*. *Quare cum* d g *sit ostensa ex binis nominibus, &* d l *majus plus posse, quàm* l g *minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; atq; idem* d l *nomen majus expositæ rationali* d e *longitudine commensurabile est*, *erit* d g *per defin.* ex binis nominibus Prima.

PRO-

PROPOS: LXII.
Theorema 44.

Quadrata ejus, quæ est ex binis *ac*, *cb*, medijs prima *ab*, ad *de* Rationalem applicatum *df*, Latitudinem *dg* facit ex binis *dl*, *lg* nominibus secundam.

Repetatur eadem constructio, quæ in præcedenti est adhibita. α *Quia ergò* a c, c b *sunt Mediæ potentia tantùm commensurabiles, quæ cõtineant* α 38. X.
Rationale, erunt earum quadrata Media & commensurabilia, & ipsis æqualia d h, i k, *media quare & totum* dk *illis* β *commensurabile,* γ *Medium; ipsiusq; Latitudo* d l δ *rationalis ipsi* d e *Lõgitudi-* β 16. X.
ne incommensurabilis. Et cum a c b *rectangu-* γ cor. 24. X.
lum α *sit rationale, ejus etiam duplum* l f *rationa-* δ 23. X.
le erit. ε *Ergò* l g *Latitudo est rationalis longitudine commensurabilis ipsi* l k, *id est,* d e. *Cum* ε 21. X.
itaque duarum d l, l g, *hæc longitudine sit commensurabilis ipsi* d e, *illa verò incommensurabilis,* ζ *erunt inter se longitudine incommensurabiles. Sunt autem & rationales* d l, l g *ut* ζ 13. X.
patet: Itaq; sunt Rationales potentia tantùm com- η 37. X.
mensurabiles η: *& tota* d g *est* ex binis nominibus. *Erit etiam* secunda. *Similiter enim, ut in præcedenti, ostenditur* d l *esse nomen majus & posse plus quàm minus* l g *quadrato rectæ sibi longi-*

tudine commensurabilis. Sed ostensum est nomen minus l g *esse longitudine commensurabile rationali* d e *positæ.* ⁿ *Erit igitur* d g ex binis nominibus secunda.

PROPOS: LXIII.

Theorema 45.

Quadrata ejus, quæ ex binis medijs secunda *a b*, ad Rationalem *d e* applicatum *d f*, Latitudinem *d g* facit ex binis nominibus *d l*, *l g* tertiam.

α 39. X. *Constructis ijsdem ut in 61, quia* a c, c b α *sunt Mediæ potentia tantum commensurabiles, quæ contineant Medium, erunt eorum quadrata media & commensurabilia; & ipsis æqualia* d h, i k *me-*

β 16. X. *dia, illisq; totum* d k β *commensurabile* γ *medi-*

γ cor. 24. X *um. Ergò* d l *Latitudo est rationalis, ipsi* d e *longitudine incommensurabilis. Et cum* a c b *rectangulum sit Medium, ejus duplum* l f *erit medium*

δ 23. X. *&* l g *latitudo longitudine* δ *incommensurabilis ipsi* l k *vel* d e. *Cum verò* a c, c b *sint longitudine*

ε 3. Lemma 19. X. *incommensurabiles, sitq; ut* a c *ad* c b, ε *ita quadratum* a c *ad rectangulum* a c b, ζ *erunt hæc in-*

ζ 10. X. *ter se commensurabilia.* η *Sed* a c *quadrato, com-*

η 16. X. *positum ex ipsis, id est* d k *est commensurabile,*

ut

ut patet, & rectangulo a c b *commensurabile est ejus duplum* l f: θ *Ergò* d k *ipsi* l f *est incommensurabile,* ζ *ipsæq́;* d l, l g *sunt longitudine incommensurabiles: Cumq́; etiam rationales, ut patet. Ergò* d l, l g *sunt rationales potentia tantùm commensurabiles, & tota* d g κ ex binis nominibus. *Erit etiam* tertia. *Similiter enim ut in 61 ostenditur* d l *esse nomen majus, posseq́; plus quàm minus* l g, *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Sed ostensum est neutrum nomen* d l, l g *esse positæ rationali* d e *longitudine commensurabile.* λ *Erit itaq́;* d g ex binis nominibus tertia.

θ 14. X.

κ 37. X.

λ per defin.

PROPOS: LXIV.

Theorema 46.

Quadratum Majoris *ab* ad Rationalem *de* applicatum *df*, latitudinem *dg* facit ex binis nominibus *dl, lg* quartam.

Constitutis iisdem ut in 61, α *quia* a c, c b *potentia sunt incommensurabiles, continentes Medium, faciuntq́; compositum ex quadratis suis Rationale, erit* d k *rationale &* l f *duplum rectanguli* a b c *Medium; adeoque* d l β *rationalis ipsi* d e *longitudine commensurabilis:* γ *Sed*

α 40. X.

β 21. X.

γ 23. X. γ *Sed* l g *rationalis ipsi* i k, *id est*, d e *longitudine incommensurabilis, ipsæq;* d l, l g *longitudine in-*
δ 37. X. *commensurabiles*, δ *vel Rationales potentia tantum commensurabiles &* d g binomialis. *Erit etiam* quarta *Quadratum enim* l m, *ut in* 61, *est æquale rectangulo* d i l. *Et quia quadrata* a c, c b *sunt incommensurabilia, etiam* d h, i k *ipsis æqualia sunt incommensurabilia*, ε *&* d i, i l *lon-*
ε 10. X. *gitudine incommensurabiles Ita, ut in* 61, *ostenditur* d l *major quàm* l g; *& ad* d l *applicatum rectangulum* d i l *æquale quadrato* l m, *quod* d l
ζ 19. X. *dividit ad* i *in partes longitudine incommensurabiles. Itaq;* ζ *poterit* d l *plus quàm* l g *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Sed majus nomen* d l *longitudine commensurabile*
η per defin, *est positæ Rationali* d e. η *Erit ergò* d g *ex binis nominibus quarta.*

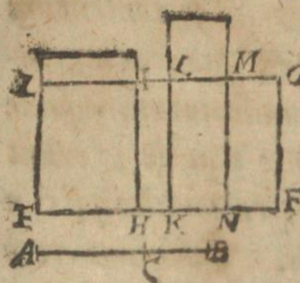
PROPOS: LXV.

Theorema 47.

Quadratum ejus *a b*, quæ Medium & Rationale potest, ad Rationalē *de* applicatū *d f*, Latitudinem *d g*, facit ex binis nominibus *d l*, *l g* quintam.

Peractis cæteris ut in 61, *quia* a c, c b α *sunt po-*
α 41. X. *tentia incōmensurabiles, facientes quidem ex suis quadratis Mediū, ac sub se contentum rationale,*

erit



erit dk *æquale cõposito quadratorum Medium*, *&* ln *duplum rectanguli* acb *Rationale. Ergo Latitudo* dl *est Rationalis longitudine* β *commensurabilis positæ* de; β 23 X. lg *verò Rationalis eidem longitudine* γ *commensurabilis*; *& sic* dl, lg *sunt longitudine* δ *incommensurabiles*; *& quia Rationales*, *sunt Rationales potentia tantùm commensurabiles, ex quibus composita* dg ε *est* ex binis nominibus *& quidẽ* quinta. *Rursus enim*; *ut in* 61 *ostẽditur*, dil *rectangulũ æquale esse quadrato* lm, *& ut in* 64, dl *nomen majus plus posse quam* lg, *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Sed minus nomen* lg *ostensum est positæ Rationali* de *longitudine commensurabile.* ζ *Erit itaq;* dg ex binis nominibus quinta.

γ 21 X.
δ 13 X.
ε 37. X.
ζ per defin.

PROPOS: LXVI.

Theorema 48.

Quadrata ejus *ab*, quæ bina Media potest, ad Rationalem *de* applicatum *df*, facit Latitudine *mdg* ex binis *dl*, *lg* nominibus Sextam.

Peractis cæteris ut in 61, *quia* ac, cb *potentia sunt incõmensurabiles*, α *faciunt & ex suis qua-* α 42. X.

dratis

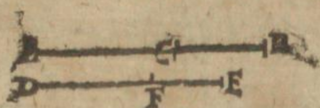
dratis compositum medium, & sub se contentum Medium, incommensurabileq́; ex quadratis composito, id est, d k *composito quadratorum æquale & l f rectangulo* a c b *bis sumto æquale; erunt Media,* β *& latitudines* d l, l g *rationales ipsi* d e
β 23. X. *longitudine incommensurabiles. Quoniam verò*
γ 13. X. d k, α *incommensurabile est rectangulo* a c b, *etiam ipsius duplum* l f γ *incommensurabile erit,* δ *ipsæq;* d l, l g, *incommensurabiles longitudine, quæ*
δ 10. X.
ε 37. X. *sunt Rationales potentia solùm commensurabiles,* ε *ac ob id* d g ex binis nominibus, *& quidem* Sexta. *Nam* d l, *ut in 65; nomen majus plus potest quam* l g *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Sed neutrum illorum nominum* d l, l g, *est ostensum Rationali positæ* d e *com-*
ζ per defin. *mensurabile longitudine.* ζ *Ergò* d g *est* ex binis nominibus Sexta.

PROPOS: LXVII.

Theorema 49.

Ei *a b*, quæ ex binis nominibus *a c*, *c b* Longitudine commensurabilis *d e*, & ipsa ex binis nominibus *d f*, *f e* est, atque ordine eadem.

Fiat



a Fiat, ut tota a b ad totam d e; ita ablata a c ad ablatam d f. b Ergò & reliqua c b ad reliquam f e erit, ut tota a b ad d e totam. Cumq; d e ipsi a b sit longitudine commensurabilis; γ Erit & d f ipsi a c; & f e ipsi c b. δ Sunt verò a c, c b nomina binomialis a b rationalia. Ergò & d f, f e sunt Rationalia. Rursus, cum sit ut a c ad d f, ita c b ad f e: & permutando, ut a c ad c b, ita d f ad f e. Sed a c, c b sunt potentia solùm comensurabiles. Ergò & d f, f e. Atq; ita d f, f e sunt Rationales potentia solùm commensurabiles, & d e ex binis nominibus. Erit & ipsi a b ordine eadem. Aut enim a c plus potest, quàm cb, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Si poterit a c plus quàm c b quadrato rectæ longitudine commensurabilis, ε poterit & d f quàm f e; atq; si nomẽ majus ac longitudine commensurabile fuerit ipsi Rationali posita; erit & d f & utraq; a b d e binomialis prima: Si minus c b etiam f e, & utraq; a b, d e est binomialis secunda; Si neutrum a c, cb vel d f, f e erit ex binis nominibus tertia. Sed si a c plus posit quàm c b quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, etiam d f quàm f e, & ita, ut antea, utraq; vel quarta vel quinta vel sexta binomialis erit per definitionem.

a 12. VI.
b 19. V.
γ 10. X.
δ 37. X.
ε 15. X.

Scho-

Scholium.

Si *de* binomiali *ab* tantùm potentia sit commensurabilis, idem quidem concluditur, sed loco longitudine commensurabilis ubique legendum est potentia commensurabilis, id est, *de* quidem concluditur Binomialis, sed non eadem ordine cum *ab*. In sequentibus autem propositionibus *de* cum *a* semper est eadem, etiamsi potentia sint commensurabiles.

PROPOS: LXIIX.

Theorema 50.

Si *ab*, quæ ex binis Medijs, *ac*, *cb*, Longitudine commensurabilis *de*, & ipsa ex binis medijs *df*, *fe* est, atque ordine eadem.

α *Fiat ut* a b *ad* d e, *ita ablata* a c *ad ablatum* d f, β *erit etiam reliqua* c b *ad reliquam* f e,
α 12. VI. *ut tota ad totam. Sed* d e *ponitur ipsi* a b *longi-*
β 19. V. *tudine commensurabilis*; γ *Ergò* d f, f e *ipsis* a c,
γ 10. X. c b *sunt longitudine commensurabiles. Sunt au-*
tem

rem a c, c b *mediæ*. ꝺ *Ergo & d f, f e. Rursus cum* ꝺ 24. X.
sit, ut a c *ad* d f, *ita* c b *ad* f e, *& permutando, ut*
a c *ad* c b, *ita* d f *ad* f e; ι *sintq́;* a c, c b *potentia* ι 38. X.
commensurabiles, γ *erunt & d f, f e. Sunt autem*
d f, f e *etiam ostensæ Mediæ; sunt ergò Mediæ po-*
tentia tantum commensurabiles, ζ *&* d e *ex binis*
mediis, & quidem cum a b *eodem ordine. Quia e-* ζ 38. vel 39. X.
nim est, ut a c *ad* c b *ita* d f *ad* f e. η *Sed ut* a c *ad* η Lemma
c b, *ita quadratum* a c *ad rectangulum* a c b, η *&* 59. X.
ut d f *ad* f e, *ita* d f *quadratum ad* d f e *rectangu-*
lum; erit etiam, ut quadratum a c *ad rectang.*
a c b, *ita* d f *quadratum ad* d f e *rectang. &*
permutando, ut quadrata a c, d f, *ita rectangula*
a c b, d f e; *Sed* a c *quadratum quadrato* d f,
(*quia* a c, d f *sunt longitudine commensurabiles*)
est commensurabile. γ *Ergò & rectangula. Si ergò*
a c b *fuerit rationale, erit &* d f e *rationale*, θ *&*
d e ex binis Mediis prima: *Si verò Medium*, θ cor. 24. X.
θ *Medium*, κ *&* d e ex binis Mediis secunda. κ 39. X.

PROPOS: LXIX.

Theorema 51.

Majori *a b* commensurabilis *d e* & ipsa *d e* Major est.



Fiant, quæ in antecedenti. Quia ergò a b, d e *longitudine vel potentia tantum*

tum sunt commensurabiles, α eodem modo tam ac, α 10. X. df, quàm ce, fe commensurabiles erunt Rursus, cum sit, ut ac ad df, ita cb ad fe: & permutando, ut ac ad cb, ita df ad fe, β erit, ut quadratum ac ad quadratum cb, ita quadratum β 22. VI. df, ad quadratum fe; & componendo: ut compositum ex quadratis ac, cb, ad quadratum cb; ita compositum ex quadratis df, fe, ad quadratum fe; & convertendo, ut quadratum cb, ad compositum quadratorum ac, cb, ita quadratum fe ad compos. Quadratorum df, fe. Sed cb quadratum, quadrato fe est commensurabile, quia ipsæ rectæ vel longitudine vel potentia sunt commensurabiles: α Ergò & compositum quadratorum ac, cb, composito quadratorum df, fe commensurabile erit. γ Sed compositum illud γ 40. X. est Rationale, quia rectæ ac, cb, componũt Ma- δ 9. defin. jorem ab. δ Igitur & hoc est Rationale. Rursus quia est, ut ac ad cb, ita df ad fe, ut in præcedenti; rectangulo acb, rectangulum dfe ostenditur commensurabile; Illudq; cum sit γ Medium, erit & hoc Medium. Sed cum sit, ut ac ad cb, ita df ad fe; γ Sintq; ac, cb, potentia incommensurabiles, α erunt & df & fe. Itaq; cum df, fe potentia sint incommensurabiles, faciantq; ex earum quadratis compositum Rationale; quod verò sub ipsis continetur, Medium; γ erit tota de Major.

PRO-

PROPOSITIO LXX.

Theorema 52.

Rationale ac Medium potenti *a b* commensurabilis *d e*, & ipsa *de* Rationale ac Medium potens est.

Constructis iisdem, ut prius, etiam ut in praecedenti compositum ex quadratis a c, c b *composito ex quadratis* d f, f e *commensurabile esse ostendiditur. Sed illud compositum est* a *Medium: ℭ Ergò & hoc. Eodemq; modo rectangulo* a c b *Rationali commensurabile & Rationale erit Rectangulum* d f e, *&* d f, f e a *potentia incommensurabiles. Itaq; tota* d e Rationale ac Medium potens a *erit, (propter affectiones ipsi competentes.)* a 41. X. b cor. 24. X

PROPOSITIO LXXI.

Theorema 53.

Bina Media potenti *a b* commensurabilis, *d e*, & ipsa *d e* bina Media potens est.

Constructis iisdem, ut prius, etiam ut antea, composito ex quadratis a c, c b *compositum ex quadratis* d f, f e a *commensurabile & Medium esse ostenditur: & rectangulo* a c b *Medio commensurabile, & Medium rectangulum* d f e. a *Sunt verò* d f, f e *potentia incommensurabiles, ut prius.* a 42. X.

a 42.X. *a Deniq; cum quadratorum* a c, c b *composito rectangulum* a c b *sit incommensurabile: sed composito quadratorum* a c, c b, *rectanguloq;* a c b *commensurabilia sunt compositum quadratorum* d f,
β 14. X. f e, *& rectangulum* d f e; *β erit etiam compositum quadratorum* d f, f e *incommensurabile rectangulo; a Eritq;* d e bina Media potens.
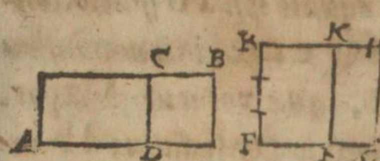
Propositionibus duabus exponit aliam differentiam Senarij primi sex Irrationalium. Vocantur autem hactenus proposita Senaria per compositionem, quod signo + componantur nomina: Sed à 74 sequuntur Senaria per detractionem, quia per signum, ÷, subducentur nomina. De quibus eadem quæ in illis docentur.

PROPOSITIO LXXII.

Theorema 54.

Si Rationale *ac* & Medium *db*, componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus; vel quæ ex binis Medijs prima; vel Major; vel Rationale ac Medium potens.

Erit* a c *quàm* d b *vel majus vel minus: æquale enim



le esse nequit, quia db *æquale rationali* ac, *foret Rationale. Sit ergò Majus. Applicetur ad rationalem* e f, e h *æquale ipsi* a c; *&* k g *æquale ipsi* d b, *ut totum* f i *sit æquale toti* a b. *Erit* e k α *rationalis ipsi* e f *longitudine commensurabilis* β, *sed* k i *rationalis eidem longitudine incõmensurabilis. Rursus quia* e h *rationale &* hi *Mediũ sunt incommensurabilia, erũt in eadem ratione* e k, k i, *longitudine* γ *incommensurabiles. Itaq; ex Rationalibus potentia incommensurabilibus composita* e i δ *erit binomialis. Sed cum* a c *quàm* d b *ponatur majus*, e h *quàm* h i, γ *erit etiam* e k *major quàm* k i. *Iam majus nomen* e k *plus poterit, quàm minus* k i *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis vel incommensurabilis. Si* e k *plus potest quàm* k i *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Sitq;* e k *nomen majus rationali* e f *commensurabile longitudine, ut patet, erit* e i *per defin.* ex binis nominibus prima. *Itaq; recta potens spacium* e g, *ipsi* a b *æquale, sub rationali* a b *& binis nominibus prima* e i *contentum: erit* Irrationalis, ε quæ ex binis nominibus *dicitur.*

α 21. X.
β 23. X.
γ 10. X.
δ 37. X.
ε 58. X.

Si verò e k *plus potest quam* k i, *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitq;* e k *positæ rationali* e f *longitudine commensurabilis, erit* e i *ex binis nominibus quarta per defin. Quare*

recta potens eg spacium æquale ipsi a b spacio, contentum sub Rationali e f & e i ex binis nominibus quarta ζ Irrationalis est, quæ vocatur Major.

ε 58. X. Sit jam a c majus Irrationale & Medium; d b verò minus Rationale, constructis ijsdem, erit e k longitudine ipsi e f incommensurabilis, & k i commensurabilis, adeoq; e k, k i rationales potentia tantum commensurabiles, & e i ex δ binis nominibus. Itaq; e k nomen majus plus potest, quàm minus k i, quadrato rectæ sibi longitudine vel commensurabilis vel incommensurabilis. Si commensurabilis, sitq; e k rationali e f positæ incommensurabilis, erit e i ex binis nominibus secunda. Quare recta potens spacium e g, sive a b, sub rationali e f & e i ex binis nominibus secunda, contententum, Irrationalis est quæ ex binis Medijs

α 56. X. prima η appellatur.

Si commensurabilis, erit e i ex binis nominibus quinta. α Quare recta potens spacium e g sive a b sub rationali e f, & ex binis nominibus quinta e i contentum, Irrationalis, est, quæ θ Ra-

ϑ 59. X. tionale ac Medium potens dicitur.

PROPOSITIO LXXIII.

Theorema 55.

Si duo Media, *a c*, *d b* inter se incommensurabilia componãtur, duæ

reli-

reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs secunda, vel bina Media potens.

Adhibita præcedentis constructione, erit a c *quàm* d b *vel majus vel minus, & nullo modo æqualis, quia contra hypothesin forent commensurabilia. Cum ergò* a c, d b *ponantur spacia Media,* α *erunt ipsis æqualia* e h, h i *media; quare* ek, ki β *ejusdē rationis rationales & longitudine* γ *incommensurabiles sunt ipsi* e f *positæ, & ex* e k, k i *rationalibus potentia tantum commensurabilibus composita* e i *est ex* δ *binis nominibus. Cumq;* a c *quàm* d b *ponatur majus, erit* e k *nomen majus,* k i *minus. Itaq;* e k *plus poterit quàm* k i *quadrato rectæ sibi longitudine vel commensurabilis vel incommensurabilis. Si commensurabilis, & utrumq; sit rationali expositæ incommensurabile, erit* e i *ex binis nominibus tertia: Quare recta potens spacium* e g *quod* a b *est æquale contentum sub rationali* e f *& ex binis nominibus tertia, Irrationalis est, quæ* ex ε binis Medijs secunda *dicitur. Si incommensurabilis, & utrumq;* e k, k i *incommensurabile ipsi* e f *positæ, erit* e i *ex binis nominibus sexta. Quare recta potens* e g *spacium sub rationali* e f *& binomiali sexta* e i *contentum,* irrationalis *est, quæ* ζ bina Media potens *vocatur*.

α 10. X.
β 1. VI.
γ 13. X.
δ 37. X.
ε 57. X.
ζ 60. X.

Corollarium.

Ex his colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales, neq; Mediæ, neque inter se easdem esse.

Nam quadratum Mediæ ad Rationalem appli-
α 23. X. catum, α latitudinem efficit rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. At Quadratum ejus, quæ ex binis nominibus, ad Ratio-
β 61. X. nalem applicatum, β latitudinem efficit ex binis nominibus primam. Et quadratum ejus, quæ est ex binis Mediis prima, ad rationalem applicatum,
γ 62. X. γ latitudinem facit ex binis nominibus secundam. Quadratum deinde ejus, quæ ex binis mediis secun-
δ 63. X. da ad Rationalem applicatum, δ latitudinem fa-
ε 64. X. cit ex binis nominibus tertiam. At Quadratum Majoris ad Rationalem applicatum, ε latitudinem facit ex binis nominibus quartam. Quadratum verò ejus, quæ Rationalem & Medium po-
ζ 65. X. test, ad rationalem applicatum, facit ζ latitudinē ex binis nominibus quintam. Postremò quadratum ejus, quæ bina Media potest, ad Rationalem
η 66. X. applicatum, η latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Itaq;, cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quòd hæc sit Rationalis; illæ verò Irrationales; inter se verò, quod ordine non sint e-

adem

eadem ex binis nominibus, perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

Hactenus itaq; de 7. Senariis est actum. In primo à 37, ad 42. docuit Euclides ortum sex Irrationalium. In secundo à 43. ad 48. docuit earum divisiones in uno puncto. In tertio à 49. ad 54. docuit inventionem Sex binomialium. In quarto à 55 ad 60, ostendit, quomodo primi Senarii sex irrationales differant, docens, quæ sit illa irrationalis, quæ potest spacium contentum sub Rationali & binomiali prima, secunda &c. In quinto à 61. ad 66. docuit, quas latitudines irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium primo Senario explicatarum ad rationalem lineam applicata. In sexto à 67. ad 71. ostendit commensurabilem alicui Irrationalium esse eandem cum illa. In 70. duabus propositionibus 72 & 73 aliam differentiam sex illarum linearum docuit.

Sequuntur jam 7 alii Senarii, in quibus Euclides demonstrat eadem de sex aliis Irrationalibus lineis, quæ per detractationem generantur, quæ hactenus de Irrationalibus per compositionem factis docuit.

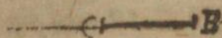
Principium Senariorum per Detractionem.

PROPOSITIO LXXIV.

Theorema 56.

Si à Rationali *ab* Rationalis *ac* auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua *bc* Irrationalis est. Vocatur autem Apotome.

a 5. Lemma 29. X.



a *Quia enim est ut* ab *ad* ac, *ita quadratum* a b *ad*

β 10. X. b a c *rectangulum; Suntq;* a b, a c *longitudine incommensurabiles,* β *erunt quadratum* a b *&* b a c *rectangulum incommensurabilia. Sed quadrato*

γ 16. X. a b *compositum ex quadratis rectarum* a b, a c *est* γ *commensurabile, quia lineæ illæ sunt potentia*

δ 14. X. *commensurabiles; & rectangulo* b a c *suum duplum est commensurabile.* δ *Compositum itaq; ex quadratis* a b, ac, *& rectangulum* b a c *bis sumtum sunt incommensurabilia. Sed compositum ex*

ε 7. II. *quadratis rectarum* a b, a c *est* ε *æquale rectangulo* b a c *bis sumto unà cum quadrato* b c. *Itaq;*

ζ cor. 17. X. *Compositum ex quadratis rectarum* a b, a c *reliquo quadrato* b c *est* ζ *incõmensurabile. Cum itaq; ex rectarum* a b, a c *quadratis compositũ sit rationale, utpote cõmensurabile quadrato* ab *Rationali, erit* b c *Irrationale & ipsa* b c *Irrationalis Vocetur autem* Apotome, Resecta vel Residuum.

PROPOSITIO LXXV.

Theorema 57.

Si à Media *ab*, Media *ac* auferatur potentia tantùm commensurabilis

existens

existens toti, quæ cū tota Rationale *bac* contineat; Reliqua *cb* Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

Cum a b, ac *sint potentia commensurabiles, earum quadrata commensurabilia erunt, & ex quadratis compositum quadrato* a c α *commensurabile. Sed quadratum* a c *Mediæ est Irrationale & Medium.* β *Ergò & compositum ex quadratis* a b, a c. *Et cum* b a c *rectangulum ponatur rationale, ejus etiam duplum erit rationale. Itaq; compositum ex quadratis & rectang.* b a c *bis sumtum sunt incommensurabilia. Sed compositum ex quadratis;* a b, a c *est* γ *æquale rectangulo* b a c *bis sumto cum quadrato* b c. *Itaq; rectang.* b a c *bis cum quadrato* b c *incommensurabile erit rectangulo* b a c *bis sumto. & rectangulum* b ac *bis incommensurabile est quadrato* b c. *Sed* b a c *rectangulum est rationale. Ergo quadratum* c b *est Irrationale & recta* c b *Irrationalis, quæ vocetur* Mediæ Apotome prima (*quia relinquitur post detractationem Minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, à majori nomine.*)

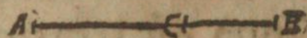
α 16. X.
β cor. 24. X
γ 7. II.

PROPOS: LXXVI.

Theorema 58.

Si à Media *ba* Media *ac* auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Mediū *bac* contineat; Reliqua *bc* Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

Quo-



Quoniam quadrata ab, a c *potentia commensurabilium sunt commensurabilia; erit & compositum*
α 16. X. *ex ipsis utriq; ipsorum* α *commensurabile. Sed utrumq; super Medijs est Medium. Ergò utriq;*
β cor. 24. X *commensurabile compositum est* β *Medium. Quia verò rectangulum* b a c *ponitur Medium, ejus etiam duplum erit Medium. Sed compositum ex quadratis* a b, a c γ *æquale est rectangulo* b a *bis*
γ 7. II. *sumto cum quadrato* b c. *Compositum ergò ex quadratis Medium est majus rectangulo* b a c *bis*
δ 27. X. *sumto Medio, quadrato* b c. δ *Sed Medium non superat Medium rationali. Itaq; quadratum* b c *non est rationale, ipsaq;* b c *linea irrationalis quæ vocetur* Mediæ Apotome secunda.

PROPOS: LXXVII.

Theorema 59.

Si à recta *ab* linea recta *ac* auferatur, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum Quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur *bac* Medium: Reliqua *bc* Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

Quo-

Quoniam compositum ex quadratis a b, a c *est Rationale, & rectangulum* b a c *Medium, etiam hujus rectanguli duplum* α *Medium erit vel Irrationale; Compositum verò ex quadratis* a b, a c β *incommensurabile rectangulo* b a c *bis sumto. Sed Compositum quadratorum* a b, a c γ *æquale est rectangulo* b a c *bis sumto cum quadrato* b c. δ *Erit itaq; compositum quadratorum incommensurabile quadrato* b c. *Sed compositum quadratorum est Rationale. Ergò quadratum* b c *est Irrationale, ipsaq;* b c *Irrationalis, quæ vocetur* Minor.

α cor.24.X
β 10. def.
γ 7. II.
δ cor.17.X

PROPOSITIO LXXIIX.

Theorema 60.

Si à recta *a b* recta *a c* auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum *a b, a c* Quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur Rationale *b a c*: Reliqua *b c* Irrationalis est. Vocetur autem *cum Rationali medium totum efficiens.*

Quoniam compositum ex quadratis rectarum a b, a c *est medium vel Irrationale, & comprehensum sub ipsis* b a c *rationale, sicut & ipsius duplum;*

a 10. def. *plum: a erunt compositum quadratorum & rectangulum* b a c *bis sumtum incommensurabilia. Sed compositum ex quadratis est rectangulo* b a c *bis sumto, cum quadrato* b c, β *aquale. Itaq; rectang.*
β 7 II. b a c *bis sumtum cum quadrato* c b *rectangulo*
γ 17. X. b a c *bis sumto est* γ *incommensurabile: & rectangulum* b a c *bis, quadrato* b c *incommensurabile. Cum itaq;* b a c *rectangulum sit Rationale, erit quadratum* b c *irrationale, ipsaq; recta* b c *Irrationalis, quæ vocetur* cum Rationali medium totum efficiens.

PROPOSITIO LXXIX.

Theorema 61.

Si à recta *a b* recta *a c* auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis *a b, a c*, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium *b a c*, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua *b c* Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

Quoniam ex quadratis rectarum a b, a c, *compositum* a *aquale est rectangulo* bac *bis sumto cum quadrato* b c; *superabit compositum ex quadratis*
a 7. II. *Medium, rectangulum* b a c *bis sumtum* β *Medium*

m quadrato b c. γ Sed medium non superat Medium Rationali. Itaq; b c erit Irrationale, ipsaq; c Irrationalis, quæ vocetur cum Medio Medium totum efficiens. β cor. 24. X γ 27. X.

LEMMA.

Si idem excessus i b sit inter primam *a b* magnitudinem & secundam *c d*, qui *k f* inter tertiam *e f* magnitudinem & quartam *g h*; erit & vicissim idem excessus *k f* inter primam *a b* magnitudinem & tertiam *e f*, qui inter secundam *c d* magnitudinem & quartam *g h*.

Quoniam i b *est excessus inter* a b, c d; *erunt* a i, c d *æquales*; *ut & e k*, g h. *Erit ergo* idem *excessus inter* a i *&* e k, *qui inter* c d *&* g h, *cum magnitudines singulæ singulis sint æquales. Est autem totorum* a b, e f *excessus idem, qui inter* a i, e k; *qui* i b *&* k f *ponuntur æquales. Idem itaq; erit excessus inter* a b, e f, *qui inter* c d *&* g h.

Corollarium.

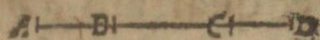
Hinc constat: Quatuor magnitudines Arithmeticam analogiam habentes, vicissim quoq; Arithmeticã analogiam habere. *Hæc enim in excessu eodem cõsistit, quem jam ostendimus.*

PRO-

PROPOS: LXXX.

Theorema 62.

Apotomæ *a b* una *b c* tantùm congruit recta linea Rationalis potentia solùm commensurabilis existens toti *a c*.



Congruat ipsi a b, *si potest, alia Rationalis* b d, *toti* a d *potentia solùm commensurabilis. Quia* b c *est rationalis, erit* a c *illi potentia solùm commensurabilis rationalis: Sunt ergò* a c, b c *potentia tantùm commensurabiles, ut & a* d, b d. *Cum verò idem sit excessus, inter compositum ex quadratis rectarum* a c, b c *& rectangulum* a c b *bis sumtum, qui inter compositum ex quadratis rectarum* a d, b d, *& rectangulum* a d b *bis sumtum,*
α 7 II. α *quia utrumq; superat utrumq; quadrato* a b; β
β lem. 79. X *erit permutando etiam idem excessus compositorum ex quadratis* a c, b c, *&* a d, b d, *qui rectangulorum bis sumptorum* a c b *&* a d b. γ *Est*
γ 27. X. *autem excessus inter illa composita spacium rationale, quod utrumq; sit rationale. Igitur & excessus bis sumtorum rectangulorum est spacium rationale. Sed cum* a c, b c *sint rationales potentia*
δ 22. X. *solùm commensurabiles,* δ *erit rectangulum* a c b *medium,*

medium, [a] *ejusq; duplum medium. Sic eadem de causa* a d b *rectangulum bis erit medium.* [γ] *Sed medium non superat Medium rationali. Ergò excessus rectangulorum* a c b *&* a d b*, id est, quadratum ex* a b *erit spacium Medium, id est, Irrationale, quod tamen modò rationale ostendebatur. Quod absurdum.* a cor. 24. X.

PROPOSITIO LXXXI.

Theorema 63.

Mediæ Apotomæ primæ *a b* una *b c* tantùm congruit recta linea Media, potentia solùm commensurabilis existens *a c* toti, & cum tota Rationale *a c b* continens.

Congruat ipsi a b *alia* b d. *Quia* b c *est Media ipsi* a c *potentia solùm commensurabilis,* [a] *erit &* a c, *media, &* a c, c b *Mediæ potentia solùm commensurabiles.* [β] *Quoniam verò inter compositū quadratorum* a c, b c, *& compositum quadratorum* a d, b d *idem est excessus, nempe quadratum* a b, *qui inter rectangula* a c b *&* a d b *quovis bis sumto. Sed excessus rectangulorum* [γ] *est spacium rationale. Ergò & excessus compositorum ex quadratis. Sed cum* a c, b c *sint Mediæ potentia solùm commensurabiles, erunt ipsarum qua-* a 24. X. β 7. II. γ Schol. 27. X.

 drata

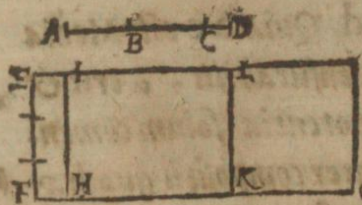
drata commensurabilia & compositũ ex ipsis utriq; ipsorum ẟ commensurabile atq; ob id & ε Medium. Nec aliter Medium erit compositum quadratorum a d, b d. ζ Sed Medium non superat Medium rationali. Ergò excessus compositorum ex quadratis erit Medium Irrationale, quod modò ostendebatur Rationale. Quod absurdum.

ẟ 16.X.
ε cor. 24. X
ζ 27. X.

PROPOSITIO LXXXII.

Theorema 64.

Mediæ Apotomæ Secundæ *a b*, unà *b c* tantùm congruit recta linea Media potentia solùm commensurabilis existens toti *a c*, & cum tota Medium *a c b* continens.



Congruat ipsi a b, si potest, alia b d; & ad Rationalem e f applicetur rectangulum e k æquale composito quadratorum a c, b c & aliud e h æquale quadrato a b, & aliud e g æquale composito quadratorum a d, b d. Quoniam itaque compositum ex quadratis rectarum a c, b c, rectangulo a c b bis sumto cum quadrato a b α æquale est; erit i k æquale rectangulo a c b bis sumto, & i g æquale rectangu-

α 7 II.

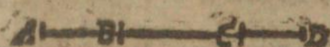
gulo a d b bis sumto. Cumq; a c, b c sint Mediæ potentia cōmensurabiles β erunt earum quadrata Media & commensurabilia, γ atq; ex ipsis compositum utriq; eorum commensurabile & δ Medium. Igitur & e k, composito illi æquale, erit Medium. Quod cum sit applicatum ad Rationalem e f, ε erit f k rationale ipsi e f longitudine incommensurabilis; neq; aliter h k rationalis est ipsi e f longitudine incommensurabilis. Et quia a c, b c longitudine sunt incommensurabiles, & est, ζ ut a c ad b c, ita quadratum a c ad rectangulum a c b, η erit quadratum a c rectangulo a c b incommensurabile. Sed quadrato a c compositum ex quadratis a c, b c est commensurabile, id est, e k rectangulum; & a c b suum duplum, id est, i k rectangulum commensurabile: Ergò e k, i k sunt incommensurabilia; atq; sic f h, h k rectæ θ incommensurabiles. Quæ cum sint ostensæ rationales: erunt f h & h k rationales potentia solùm commensurabiles. Cum ergò ex Rationali f k auferatur rationalis h k ipsi f k potentia tantum commensurabilis, κ erit f h Apotome & illi congruens h k. Similiter ostendetur f h apotome, illiq; congruens h g. Atq; ita apotomæ f h non una tantum congruet recta potentia solùm commensurabilis existens toti. Quod λ absurdum.

β 24. VI.
γ 16. X.
δ cor. 24. X
ε 23. X.
ζ 3. Lemma 19. X.
η 10. X.
θ 14. X.
κ 74. X.
λ 80. X.

PROPOS: LXXXIII.

Theorema 65.

Minori *ab* una tantùm congruit recta linea *bc* potentia incommensurabilis existens toti *ac*, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum *ac*, *bc* quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium *acb*.



Congruat ipsi a b. *si potest, alia* b d. *Quoniam, ut in 80. propos. idem est excessus compositorum ex* α Schol. 23 X. *quadratis* a c, b c *& ex quadratis* a d, bd *qui inter rectãgula* a cb, *&* adb *quolibet bis sumto*; α *Sed excessus compositorum ex quadratis est Rationale, quia utrunq; ponitur rationale. Ergò & excessus rectangulorum* a c b *&* a d b *est spacium Rationale. Idem verò etiam est non rationale, quia re-* β 27. X. *ctangula ponuntur Media*, β *quæ se non excedunt rationali. Ne ergò absurdum hoc sequatur, vera erit propositio.*

PROPOS: LXXXIV.

Theorema 66.

Ei *ab*, quæ cum Rationali Medium to-

tum facit, una tantum congruit recta linea *b c* potentia incommēsurabilis existens toti *a c*, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur *a c b* Rationale.

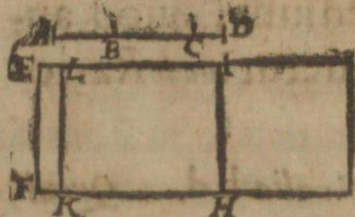
Præstet hoc, quod b c, *alia* b d. *Quoniam ut in 80. propos. idem est excessus compositorum ex quadratis* a c, b c, *& ex quadratis* a d, b d, *qui inter rectangula* a c b *&* a d b *quolibet bis sumto, Sed inter hæc rectangula, ut in 81. propos. spacium est rationale. Igitur & compositorum ex quadratis excessus est spacium rationale. Sed idem etiam est non rationale, quia utrumque est medium quæ se non excedent rationali. Ne ergò absurdum hoc sequatur, vera erit propositio.* a 27. X.

PROPOS: LXXXV.

Theorema 67.

Ei *a b*, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea *b c* potentia incommensurabilis existens toti *a c*, & cum tota faciens & compositum ex ipsa-

rum Quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur *a c b* Medium, incommensurabileq́; composi.o ex ipsarum Quadratis.



Præstet hoc, si potest, quod b c, *alia* b d; *eademq́; adhibeatur constructio, quæ in* 82. *Quoniam compositū ex quadratis* a c, b c, *est Mediū; ipsi æquale*, e k *erit*
α 23. X. *Mediū, & recta* f h *rationalis ipsi* e f *longitudine* α *incommensurabilis. Rursus cum* a c b *rectangulum sit Medium, & ipsius duplum, id est,* i k *Medium; erit & recta* h k *Rationalis longitudine incommensurabilis ipsi* e f *rationali. Et quoniam* i k *rectangulo* a c b, *tanquam duplum, est commensurabile, quod rectangulum* ac b *incommensurabile ponitur composito ex quadratis*, a c, b c, *id est, ipsi* e h, *erit* i k *eidem composito* e h β *in-*
β 14. X. *commensurabile, & rectæ* f h, h k, *eandem ha-*
γ 10. X. *bentes rationem, longitudine* γ *incommensurabiles. Quæ cum etiam sint Rationales. Erunt ergò rationales potentia solum commensurabiles. Quare cum ex* f h *rationali auferatur rationa-*
δ 74. X. *lis* h k, δ *erit* f k *apotome, & ipsi congruens* h k. *Nec aliter ostendemus* f k *esse apotomen, & ipsi*

ipsi congruentem hk, *Vnde fieret, ut Apotoma uni non una tantum congrueret. Quod absurdum.* 180. X.

Definitiones
Tertiæ.

Exposita Rationali & Apotoma; si tota plus possit quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

1 Si quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome prima.

2. Si verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Secunda.

3. Quod si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome tertia.

Rursus si tota plus possit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

4. Siquidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Quarta.

5. Si verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Quinta.

6. Quod si neque tota, neq; congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur Apotome Sexta.

PROPOSITIO LXXXVI.

Problema 19.

Invenire primam Apotomen.

a 2 Schol. 29. X.
b cor. 6. X.

A . . . . . . C . . . . B
D
E G F
H

a Inventis duobus numeris quadratis ab, bc *quorũ excessus* ac *sit non quadratus, assumtaq; Rationali* d, *& ipsi longitudine commensurabili* ef *fiat, ut* ab *fit, ut* ab *ad* ac, *b ita quadratum* ef *ad quadratũ* gf *non secus ac* *c 49. X. Erit* eg *Apotome. Quoniã quadrata* ef, gf *sunt*

g f sunt, ut numeri a b, a c, γ erunt potentia saltem commensurabiles rectæ e f, g f. Sed e g est rationalis, quia posita d rationalis longitudine est commensurabilis. Ergò & g f est rationalis. Cum verò a b & a c proportio non sit numerorum quadratorũ, δ erunt e f, g f lõgitudine incommensurabiles & sic e f, g f rectæ potentia tantum commensurabiles: ε Reliqua igitur Apotome, & quidem prima. Possit enim e f plus quàm g f quadrato rectæ h: Quia est ut numerus a b ad numerum a c, ita quadratum e f ad quadratum g f; erit & convertendo, ut a b ad c b ita quadratũ ex e f, ad quadratum ex h. Sed a b, c b habent rationem quadratorum. Ergò & quadrata e f & h, & sic e g & h sunt longitudine δ cõmensurabiles. Quoniam igitur tota e f plus potest, quàm congruens g f, quadrato rectæ h sibi commensurabilis longitudine erit e g per defin. Apotome prima.

γ 6. X.
δ 9. X.
ε 74. X.

PROPOS: LXXXVIII.

Problema 20.

Invenire Secundam Apotomen.

Fiant omnia ut in 50. propos. Erit e g Apotome Secunda. Quoniam enim quadrata g f, e f proportionem habentia numerorum a c, a b commensurabilia sunt, α erunt rectæ g f, e f commensurabiles

α 6. X.

 biles

biles saltem potentia. Sed g f *est rationalis, quia posita rationali* d *commensurabilis longitudine; erit ergò* e f *etiam Rationalis, & quia* a c, a b, *& sic quadrata* g f, e f. *proportionem non habent quam numeri quadrati:* β *erunt rectæ* g f, e f
β 9. X. *longitudine incommensurabiles & sic rationales*
γ 47. X. *potentia solùm commensurabiles.* γ *Ideoq;* e g *reliquum est* Apotome: *& quidem* Secunda. *Possit enim* e f *plus quàm* g f, *quadrato* h: *erit ut in antecedenti* h *ipsi* e f *longitudine commensurabilis. Quare, cum tota* e f *plus possit, quàm congruens* g f, *quadrato rectæ* h *sibi longitudine commensurabilis, erit* e g Apotome Secunda.

PROPOSITIO LXXXIIX.

Problema 21.

Invenire Tertiam Apotomen.

Fiant omnia, ut in 51. *Erit* e g *Apotome. Quoniam enim quadrata* e f, g f *proportionem habentia numerorum* a b, a c, *cõmensurabilia sunt; erunt* e g, g f *rectæ commensurabiles saltem potentia: & quia* e f *rationalis, erit &* g f *rationalis. Quia verò* a b, a c *& sic quadrata* e g, g f *proportionem non ha-*
α 9. X. *bent, quadratorum numerorum,* α *erunt* e f, g f

longi-

longitudine incommensurabiles & sic rationales potentia solùm commensurabiles. β *Ideoq;* e g *reliqua* Apotome *est, & quidem* Tertia. *Quoniam est, ut* i *ad* a b, *ita quadratum* d *ad* e f; *& ut* β 74. X.
a b *ad* a c *ita quadratum* e f *ad quadratum* g f; *erit ex æquo; ut* i *ad* a c: *ita quadratum* d *ad quadratum* g f. *Sed* i *&* a c *non habent rationem numerorum quadratorum; ergò nec* d *&* g f; *& sic* d *&* g f *rectæ sunt longitudine* α *incommensurabiles. Neutra igitur ipsarum* e f, g f *positæ rationali* d *longitudine commensurabilis est. Possit eam* e f *plus quàm* g f *quadrato rectæ* h *sibi longitudine commensurabilis; erit, ut in 86.* h *ipsi* e f *longitudine incommensurabilis. Quare, cum* e f *plus poßit quàm* g f (*neutra earum positæ rationali existente commensurabili*) *quadrato rectæ* h *sibi longitudine commensurabilis; erit* e g *ex definitione Apotome tertia.*

PROPOSITIO LXXXIX.

Problema 22.

Invenire Quartam Apotomen.

A . . . . C . . . B
D
I G F
H

Fiant omnia, ut in 52. Erit, ut in 86, e g *Apotome; & quidẽ quarta. Poßit enim* e f *plus quã* g f *quadrato rectæ* h.

Quia

Quia ergò est, ut a b *ad* a c, *ita quadratum* e f *ad quadratum* g f; *erit convertendo, ut* a b *ad* c b *ita quadratum* e f *ad quadratum* h. *Cum itaq;* a b, c b *non habeant proportionem numerorum quadratorum, erunt* e g *&* h *rectæ longitudine*
49. X. *incommensurabiles. Quoniam itaq; tota* e f *posita rationali existens commensurabilis longitudine, plus potest quàm* g f *quadrato rectæ* h *sibi longitudine commensurabili, erit* e g *ex defin.* Apotome Quarta.

PROPOS: XC.

Problema 23.

Invenire Apotomen Quintam.

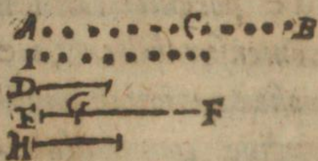
Fiant omnia ut in 53. Erit, ut in 87. e f *Apotome; & quidem Quinta. Possit* e f *plus quàm* g f *quadrato rectæ* h. *Et quia similiter ut in 86. ostendemus per conversionem rationis esse, ut* a b *ad* c b; *ita quadratum* e f *ad quadratum* h; *erunt rursus, ex 89. rectæ* e f *&* h *incommensurabiles longitudine: Estq; congruens* g f *rationali positæ* d *longitudine commensurabilis. Ergò ex definitione* eg Apotome Quinta.

PROPOS: XCI.

Problema 24.

Inve-

Invenire Apotomen Sextam.



Fiant omnia ut in 54. Erunt, ut in 88, d *&* e f *longitudine commensurabiles&* e g *Apotome. eaq; Sexta. Nam* d *&* g f *sunt longitudine incommensurabiles, adeoq; neutra ipsarum* e f, f g *commensurabilis exposita rationali* d. *Posit* e f *plus quàm* g f *quadrato rectæ* h, *quæ ut in 89, ipsi* e f *longitudine incommensurabilis est. Est ergò* e f *ex definitione* Apotome Sexta.

Scholium.

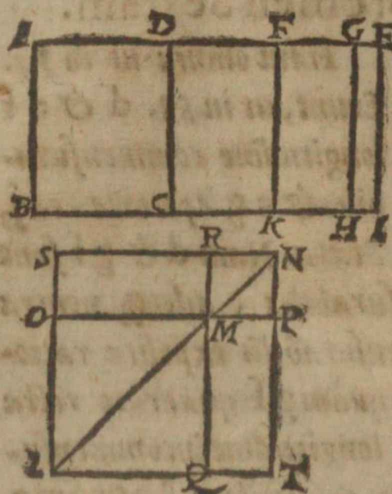
Theon invenit Apotomas promtius, subductis binomiorum nominibus minoribus ex majoribus; atq; ita apotomarum ordo respondet ordini binomiorum.

PROPOS: XCII.

Theorema 68.

Si spacium *a c* contineatur sub ℞ationali *a b* & Apotoma prima *a d*, recta linea *o m* spacium potens, Apotoma est.

Ipsi a d *congruat* d e, *& erunt ex definitione apoto-*



apotomæ primæ a e, d e *potentia tantùm cõmensurabiles, &* a e *positæ rationali longitudine commensurabilis.* *Secta* d e *bifariam in* f; *quadrato* f e *ad* a e α *applicetur æquale rectangulum* a g e. *Et quia* a e *plus potest quàm* d e

α 2. Lemma 17. X.

quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, β *erunt* a g, g e *rectæ longitudine commensurabiles,* γ *& sic utraq; toti* a e *longitudine commensurabilis.* *Sed* a e *rationali* a b *longitudine est commensurabilis:* δ *Ergò & utraq;* a g, g e, *rationali commensurabilis est longitudine, &* ε *rationalis.* *Quare ductis* g h, e i *ipsi* a b *parallelis,* ζ *erunt* a h, g i *rectangula rationalia. Rursus quia utraq;* d f, f e *longitudine commensurabilis est ipsi* d e; d e *verò longitudine incommensurabilis rationali* a b; η *erit utraq; ipsarum* d f, f e *ipsi* a b θ *longitudine incommensurabilis. Itaq; rectangulum* f c *sive* f i *sub Rationalib. potentia commensurabilibus contentum erit* θ *Medium.* *Iam* κ *fiant ipsis* a h, g i *quadrata* s t, r p *æqualia ad communem angulum* n *juncta,* λ *erunt quadrata* s t, r p *circa eandem diametrum* l n. *Quoniam itaq; rectangulum* a g e,

β 18. X.
γ 16. X.
δ 12. X.
ε 6. def.
ζ 10. X.
η 14. X.
θ 22. X.
κ 14. II.
λ 26. VI.

a g e, quadrato c f est æquale; μ erunt a g, f e, g e rectæ proportionales, ν adeoq; f i medium proportionale inter a h, g i, id est, inter s t, r p quadrata: Sed s p inter eadem quadrata est ξ Medium proportionale. Sunt itaq; rectangulũ s p & f i æqualia: Sed ipsi f i æquale est f e, & ipsi s p æquale r t: Itaq; totum d i gnomoni o n q cum quadratis r p est æquale. Est a. totũ ai π æquale quadratis s t, r p. Itaq; reliquũ a c quadratis o q æquale est, & o m potest spacium a c. Dico esse Apotomen. Quia enim a h, g i sunt spacia rationalia, ut patet; ipsis æqualia quadrata s t, r p rationalia, & rectæ o p, m p, Rationales erunt. Cumq; f i sit medium, & ei æquale s p erit Medium; adeoq; ς incommensurabilia sunt s p, r p; & σ ejusdem cum ipsis rationis rectæ o p, m p incommensurabiles; & reliqua o m Apotome.

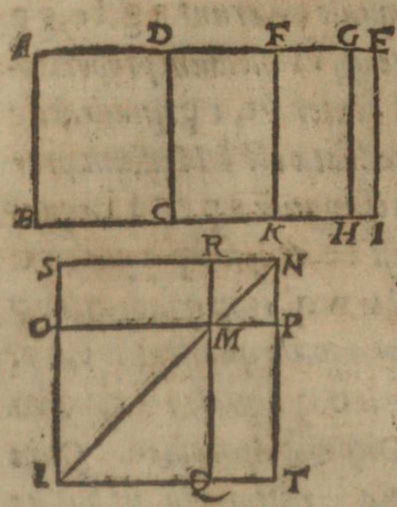
μ 17. II.
ν 1. VI.
ξ lem. 4. X.
π ex constr.
ς 10. X.
σ 74. X.

PROPOS: XCIII.

Theorema 69.

Si spacium *a c* contineatur sub Rationali *a b* & Apotoma secunda *a d*; Recta linea *o m* spacium potens, Mediæ est apotome prima.

Ipsi



Ipsi a d *congruat* d e, *quibus conveniunt, quæ habet definitio apotomæ secundæ. Secta* d e *bifariam in* f *reliqua omnia construantur, ut in 92.* α *Erunt rursus* a g, g e *longitudine* β *commensurabiles, tum inter se, tum ipsi* a e. *Sed* a e *positæ rationali* a b *longitudine est incommensurabilis;* γ *ergò &* a g, g e, *quæ cum rationali* a e *commensurabiles sint;* δ *ipsi* a b *potentia tantùm commensurabiles sunt. Rectangula itaq;* a h, g i *sunt* ε *media. Rursus cum* d e, a b ζ *sint Rationales longitudine commensurabiles; sint &* d f, f e *longitudine tùm inter se, tum ipsi* d e *commensurabiles; erunt* f c, f i *rectangula sub rationalibus longitudine commensurabilibus contenta rationalia. Iam verò, ut in præcedenti, ostenderetur* o m *posse spaciū* a c. *Erit autem* o m *Mediæ Apotome prima. Quoniam* a g, g e *commensurabiles sunt longitudine,* η *erunt &* a h, g i, *sive* s t, r p *commensurabilia. Ergò &* o p, m p *erunt commensurabilia potentia tantum: & quidem Media, quod quadrata* s t, r p, *æqualia Mediis* a h, g i *Media sint. Cumq;* f i, *& ipsi æquale* s p *sit*

α 18. X.
β 16. X.
γ 14. X.
δ 6. defin.
ε 22. X.
ζ ex hypot.
η 10. X.

sit rationale; & sic medio r p *incommensurabile, erunt* o p, m p *ejusdem cum ipsis rationis incommensurabiles longitudine. Cum verò etiam sint Mediæ, ut patet, & commensurabiles, erunt* o p, m p *Mediæ potentia tantùm commensurabiles, & quia continent rationale* s p, *ε erit* o m Mediæ Apotome prima. ε 57. X.

PROPOS: XCIV.

Theorema 70.

Si spacium *a c* contineatur sub Rationali *ab*, & Apotoma *a d* tertia Recta linea *o m* spacium potens, Mediæ est Apotome secunda.

Ipsi a d *congruat* d e, *quibus conveniunt proprietates definitionis Apotomæ tertiæ. Secta* d e *bifariam in* f, *fiant omnia ut in 92; α eruntq; rursus* a g, g e *tum inter se tum ipsi* a e *lõgitudine commensurabiles. Quare cum* a e *γβ sit ipsi* a b *longitudine incommensurabilis, eidem &* a g, g e *longitudine incommensurabiles erunt. Sed* a e *est rationalis: Ergò & ipsi potentia commensurabiles* a g, g e *sunt rationales; δ atq; ita rectangula* a h, g i *sunt Media. Rursus cum* d e *ponatur longitudine incommensurabilis rationali* a b, *utraq;* d f, f e *huic* d e *commensurabilis, ε erit ipsi* a b *longitudine incommensurabilis; ipsaq; rectangula* f c,

α 18. X.
β 16. X.
γ ex hypot.
δ 22. X.
ε 14. X.

fl media. Ostendetur autem, ut in 92, rectam om posse spacium a c; quam dicemus Mediæ Apotomæ Secundam. Quoniam enim a h, i g sunt

§10. X. Media, quadrata etiam s t, r p ipsis æqualia erunt Media, & ipsaque latera o p, m p Media. Sed a g, g e sunt ostensæ commensurabiles: Ergò & a h, g i, vel s t, r p commensurabilia sunt, ipsæque o p, m p potentia tantum commensurabiles. Et quia ipsi a e ostensa est g e commensurabilis longitudine & f e ipsi d e, erunt, g e, f e longitudine incommensurabiles, & sic ejusdem rationis g i, f i, id est, r p, s p incommensurabilia; ipsæque o p, m p & incommensurabiles longitudine. Cumque etiam sint Mediæ & commensurabiles, erunt

76. X. o p, m p Mediæ potentia tantùm commensurabiles, & quia continet s p Medium, n erit o m Mediæ Apotome Secunda.

PROPOS: XCV.

Theorema 71.

Si spacium *ac* contineatur sub Rationali *ab*, & Apotoma *ad* quarta, recta linea *om* spacium potens, Minor est.

Ipsi a d *congruat* d e, *quibus conveniunt proprietates Apotomæ quartæ. Secta* d e *bifariam, fiant*

stant omnia ut in 92; eruntq; a g, g e *longitudine incommensurabiles, cum* a e *plus poßit quam* d e *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Et quia* a e *est rationalis, rationalis* a b *longitudine commensurabilis,* α *erit* a i *rationale. Rectangulum verò* d i β *medium (quia* d e *rationalis ipsi* a b *longitudine incommẽsurabilis est) ipsiusq; dimidium* f i *Medium. Incommensurabilia autem erunt* a h, g i, *cum* a g, g e *ostensæ sint incommensurabiles. Iam ostendetur ut in 92. rectam* o m *posse spacium* a c, *quam & Minorem dicemus. Quoniam enim* a i *rectangulum est rationale etiam compositum ex quadratis* s t, r p *ipsi* γ *æquale erit rationale. Et quia* f i *est Medium, ut patet; erit & s p, sub quadratorum lateribus* o p, m p *comprehensum Medium. Cumq;* a h, g i *sint incommensurabilia ostensa, ipsis etiam æqualia quadrata* s t, r p *incommensurabilia erunt & rectæ* o p, m p *potentia incommensurabiles; Proinde quia* o p, m p *sunt potentia incommensurabiles, & compositum ex quadratis Rationale, rectangulumq; sub ipsis Medium,* δ *erit reliqua* o m Minor.

α 20. X.
β 22. X.
γ ex constr.
δ 77. X.

PROPOS: XCVI.

Theorema 72.

Si ſpacium *ac* contineatur ſub Rationali *ab* & Apotome quinta *ad*, Recta linea *om* ſpacium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

Ipſi a d *congruit* d e, *quibus conveniant proprietates Apotomæ quintæ. Secta* d e *biſariam, fiant omnia ut in 92;* *Eruntq; ut in 95.* a g, g e *longitudine incommenſurabiles, & a i ut in 93, Medium;* d i *verò Rationale ipſiusq; dimidium* f i *rationale. Erunt &* a h, g i *ut in 95 incommenſurabilia, poteritq;* o m, *ut in 92, ſpacium* a c, *quæ* o m *dicitur cum rationali Medium totum efficiens. Quoniam enim* a i *eſt Medium, erit compoſitum ex quadratis* s t, r p *Medium: Cumq;* f i *ſit rationale, etiam* s p, *ſub* o p, m p *rationale erit. Sunt autem* o p, m p *potentia incommenſurabiles, ut in 95 patet. Itaq; cum* o p, m p *ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, rectangulum verò ſub ipſis Rationale;*
678. X. *reliqua* o m *erit, quæ cum rationali Medium totum efficit.*

PROPOS: XCVII.

Theorema 73.

Si ſpacium *ac* contineatur ſub Rationali

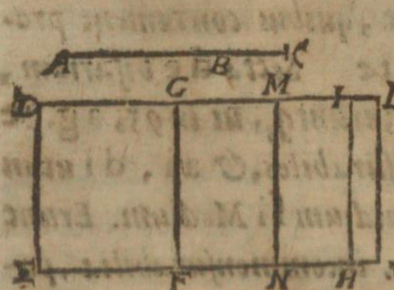
rionali *ab* & Apotoma ſexta *ad*, Recta linea *om* ſpacium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.

Ipſi a d *congruat* d e, *quibus convenient proprietates Apotomæ ſextæ. Secta* d e *biſariam, fiant reliqua, ut in 92; eruntq;, ut in 95,* a g, g e *longitudine incommenſurabiles, &* a i, d i *ut in 94, Media, hujusq; dimidium* f i *Medium. Erunt etiam* a h, g i, *ut in 95, incommenſurabilia, poteritq;* o m, *ut in 92, ſpacium* a c. *Quæ* o m *dicetur* cum Medio Medium totum efficiens. *Quoniam enim* a i *eſt Medium, erit & compoſitum ex quadratis rectarum* o m, m p *Medium. Et cum* f i *ſit Medium, erit &* s p *ſub* o p, m p *contentum Medium. Cumq;* f i *ipſi* a i *ſit incommenſurabile, etiam* s p *incommenſurabile erit cõpoſito ex quadratis* s t, r p. *Deniq;* o p, m p *ſunt incommenſurabiles potentia, ut in 95. Quare cum* o p, m p *ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, rectangulumq; ſub ipſis Medium, & compoſito ex ipſarum quadratis incommenſurabile: reliqua* o m *a erit ea, quæ cum Medio, Medium totum* a 79. X.
efficit.

PROPOS: XCIIX.

Theorema 74.

Quadratum Apotomæ *ab* ad Rationalem *de* applicatum *df*; latitudinem *dg* facit Apotomen primam.



Apotomæ a b *congruat* b c, *ut* a c, b c *sint rationales potentia solùm commensurabiles. & ad* d e *rationalem* α *applicetur* d f *æquale quadrato*
α 45. I.
a b, *cujus latitudo* d g *erit Apotome prima. Applicetur enim ad eandem* d e *rectang.* d h *æquale quadrato* a c *&* i k *ad* i h *æquale quadrato* b c, *ut totum* d k *æquale sit quadratis*, a c, b c.
Quoniam ergò hoc quadratorum compositum
β 7. II.
β *æquale est rectangulo* a c b *bis sumto, cum quadrato* a b; *ablato hoc quadrato* d f; *erit reliquum* g k *æquale rectangulo* a c b *bis sumto: ideoq; divisa* g l *bisariã per* m n *erit* m k *rectangulo* a c b *æquale. Cumq;* a c, b c *sint rationales, erunt & earum quadrata rationalia, & ex ipsis*
γ 16. X.
γ *compositum, id est*, d h *rationale, adeoq; & in-*
δ 21. X.
ter se, & huic commensurabilia: δ *eritq;* d l *ipsi* d e *longitudine commensurabilis. Rursus, quia* a c, b c *sunt rationales potentia solùm commensurabiles, erunt, & earum rectangulum* m k *& hujus duplum* g k *Media, & sic latitudo* g l *ra-*

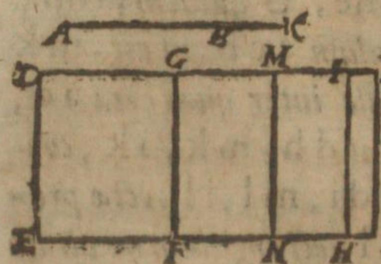
g l *rationalis ipsi* g f, *id est*, d e *longitudine* ι *in commensurabilis.* *Et cum* d k *sit rationale*, g k Irrationale & Medium, *erunt inter se incommensurabilia*, & *sic* d l, g l ζ *incommensurabiles vel Rationales potentia tantùm commensurabiles*, *adeoq;* d g η Apotome, & *quidem* prima. *Quoniam enim rectangulum* a c b, *id est*, m k *est* θ *medium proportionale inter quadrata* a c, b c, *id est*, d h, i k, *erunt* d h, m k, i k, *continuè proportionalia*, & d i, m l, i l *rectæ proportionales.* *Itaque* d i l *rectangulum quadrato* m l *est* κ *æquale.* *Cumq;* *quadrata* a c, b c, *id est*, d h, i k *sint commensurabilia* ζ *erunt* d i, i l *longitudine commensurabiles.* *Cum ergò* d l, g l *sint inæquales* & *ad majorem* d l *applicatum sit* d i l *rectangulum æquale quadrato* m l, *id est*; *quartæ parti* g l: *Sint verò* d i, i l *ostensæ commensurabiles* λ *poterit* d l *plusquàm* g l *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.* *Quare cum* d g *sit ostensa apotome*, *totaq;* d l *plus possit quàm* g l *congruens quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis*, *eademq;* *tota rationali* d e *longitudine commensurabilis sit.* *Erit ex defin.* d g Apotome prima.

ι 23. X.
ζ 10. X.
η 47 X.
θ Lemma 54. X.
κ 17. VI.
λ 18. X.

PROPOS: XCIX.

Theorema 75.

Quadratum Mediæ Apotomæ primæ *ab* ad Rationalem *de* applicatum latitudinem *dg* facit Apotomen secundam.



Mediæ Apotomæ primæ ab *congruat* bc, *ut* ac, bc *sint Mediæ potentia solùm commensurabiles, contineántq; Rationale; & ad* de *rationalem applicetur* df *æquale quadrato* ab; *Erit* dg *Apotome. Iisdem enim constructis, ut in præcedenti: Quoniam* ac, be *sunt mediæ potentia commensurabiles, erunt earum quadrata, id est,* dh, ik *Media & commensurabilia,*
α 16. X. α *totumq;* dk *utriq; ipsorum commensurabile &*
β cor. 24. X β *medium. Hoc ad* de *rationale applicatum* γ *facit*
γ 23. X. dl *rationalem ipsi* de *longitudine incommensurabilem. Rursus, quia rectangulum* acb *ponitur rationale, erit ejus duplum* gk *rationale,*
δ 21. X. *ejusq; latitudo* gl *rationalis ipsi* gf, *id est,* de *longitudine* δ *commensurabilis. Sed quia* dk *est*
ε 10. X. *Medium,* gk *verò rationale,* dl *&* gl ε *sunt incommensurabiles; & quia etiam rationales, sunt rationales potentia tantùm commensurabiles; ac*
ζ 74. X. dg ζ Apotome eaq; Secunda. *Ostenditur enim, ut in 98, tota* dl *plus posse quàm* gl *congruens*

gruens quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; quæ g l *cum sit longitudine commensurabilis rationali positæ* d e; *ex definitione igitur* d g *est* Apotome Secunda.

PROPOSITIO C.

Theorema 76.

Quadratum Mediæ Apotomæ secundæ, *a b* ad Rationalem *de* applicatum *df*, Latitudinem *dg* facit Apotomen Tertiam.

Mediæ Apotomæ secundæ a b, *congruat* b c, *ut* a c, b c *sint Mediæ potentia solùm commensurabiles, continentes Medium: & ad* d e *rationalem applicetur* d f *æquale quadrato* a b: *Erit* d g *apotome. Iisdem enim; quæ prius, constructis, ut in 99,* d k *est Medium*, & d l *rationalis longitudine* α *incommensurabilis ipsi* d e. *Et cum* a c b *rectangulum sit Medium, etiam ipsius duplum* g k, & *latitudo* g l *longitudine incommensurabilis rationali* d e. *Sed quia* a c, c b *sunt longitudine incommensurabiles; & est,* β *ut* a c *ad* b c, *ita quadratum* a c *ad rectangulum* a c b; γ *erunt & hæc inter se incommensurabilia. Et quia quadrato ex* a c *compositum ex quadratis* a c, b c *est* δ *commensurabile, rectangulo verò* a c b *suum duplum;* ε *erunt compositum ex quadratis, id est,* d k & *rectan-*

α 23. X.
β 3. Lemma 19. X.
γ 10. X.
δ 16. X.
ε 14. X.

rectangulum bis, id est, g k *incommensurabilia; rectæq;* d l, g l *longitudine incommensurabiles. Quæ cum etiam sint rationales; Erunt rationales potentia tantùm commensurabiles &* dg
§ 74. X. ¿Apotome, eaq; Tertia *Ostenditur enim; ut in 98,* d l *totam plus posse applicatâ* g l *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Sed cum neutra illarum* d l, g l *sit longitudine commensurabilis positæ rationali* d e, *erit ex definit.* Apotome Tertia.

PROPOSITIO CI.

Theorema 77.

Quadratum Minoris *a b* ad Rationalem *d e* applicatum *d f*, Latitudinem *d g* facit Apotomen Quartã

Minori a b *congruat* b c, *ut* a c, b c *potentia incommensurabiles sint, facientes ex suis quadratis compositum rationale; sed rectangulum* a c b *Medium, & ad* d e *rationalem applicetur* d f, *ut antea, eritq;* d g *apotome. Iisdem enim ut prius constructis in 100; Quoniam* d k *æquale composito quadratorũ* ac, b c *est rationale,* « *erit* d l *ratio-*
« 21. X. *nalis rationali* d e *longitudine commensurabilis:* a c b *autem medium; erit & ejus duplum, id est,* g k *medium, &* g l *rationalis, ipsi* d e *longitudine*
ß 23. X. ß *incommensurabilis. Rursus, quia* d k *rationale,* g k *medium, erunt incommensurabilia, ipsæq;* d l, g l *longitudine incommensurabiles; atq; ita Ra-*

tiona-

tionales potentia tantum commensurabiles, & d g *δ 74. X.*
δ Apotome, eaq; Quarta. *Quoniam enim* a c b c *potentia sunt incommensurabiles, earum quadrata* d h, i k *incommensurabilia* γ & d l, i l *longitudine incommensurabiles sunt. Cum itaq;* d i l *rectangulum, æquale sit quadrato* m l, *ut ex 98 patet,* ε *poterit* d l *plus quàm* g l *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis.* ε *19. X.* *Itaq; cum tota* d l *positæ rationali* de *longitudine commensurabilis, plus poßit, quàm congruens* g l *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: erit* d g *reliqua ex definitione,* Apotome Quarta.

PROPOS: CII.

Theorema 78.

Quadratum ejus *a b*, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem *de* applicatum *df*, Latitudinem *d g*, facit Apotomen Quintam.

Rectæ cum Rationali Medium totum efficienti a b *congruat* b c, *ut* a c, b c *sint potentia incommensurabiles; facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum verò rationale; & ad* d e *rationalem applicetur* d f *ut antea. Erit* d g *apotome. Quoniam enim ex quadratis rectarum* a c, b c *compositũ, id est,* d k *est Medium,* α *erit* d l *rationalis positæ longititudine incommensurabilis: Rectangulum autem* a c b, *α 23. X.*

ejusq;

β 21. X. *ejusq; duplum* g k *rationale*, β *erit* g l *positæ longitudine commensurabilis. Cum itaq;* d k *sit Medium, & g k rationale, incommensurabilia sunt; &*
γ 10. X. d l, g l *longitudine* γ *incommensurabiles, adeoq; Rationales potentia tantùm commensurabiles, &*
δ 74. X. d g δ Apotome eaq; quinta. *Ostenditur enim, ut in* 101, d l *plus posse quàm* g l *congruens, quæ posita rationali longitudine commensurabilis est, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Erit ergo ex definitione* d g Apotome quinta.

PROPOS: CIII.

Theorema 29.

Quadratum ejus *a b*, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem *d e* applicatum *d f*, Latitudinem *d g*, facit Apotomen Sextam.

Rectæ cum Medio medium totum facientia b *congruat* b c, *ut* a c, b c *potentia sint incommensurabiles, facientes compositum ex suis quadratis & rectangulum medium, & ad rationalem* d e *applicentur ut antea. Erit* d g *apotome. Quoniam enim tam compositum ex quadratis* a c, b c, *id est* d k, *quam rectangulum* a c b *ipsiusq; du-*
α 23. X. *plum* g k *sunt Media;* α *erunt* d l & g l *rationa-*
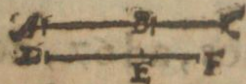
les

les longitudine incommensurabiles positæ rationali d e. *Cumq;* a c b *rectangulum composito quadratorum sit incommensurabile, erunt* g k, d k *incommensurabilia,* β *&* g l, d l *longitudine incommensurabiles, adeoq; rationales potentia solum commensurabiles, &* d g γ Apotome eaq; Sexta. *Ostenditur enim, ut in 101,* d l *plus posse quàm congruens* g l *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: & quia neutra illarum positæ rationali* d e *longitudine commensurabilis est, erit ex definitione* d g Apotome Sexta. β 10. X. γ 74. X.

PROPOS: CIV.

Theorema 80.

Recta linea *de* Apotomæ *a b* Longitudine commensurabilis, & ipsa *de* Apotome est, atque ordine eadem.



Apotomæ a b *congruens sit* b c, *ut* a b, b c *sint rationales potentia commensurabiles, sitq;* d e *commensurabilis ipsi* a b: *Erit* d e *apotome ordine eadem cum* a b. α *Fiat, ut* a b *ad* d e, *sic* d c *ad* e f. β *Ergò etiam est ut* a c *ad* d f, *ita* b c *ad* e f. *Quoniam igitur* a b, d e *sunt longitudine commensurabiles,* γ *erunt &* b c, e f, *&* a c, d f *lon-* α 12. II. β 12. V. γ 10. X.

d f *longitudine comm.nsurabiles. Et cum* a c, b c *sint rationales,γ etiam* d f, e f *ipsis commensurabiles rationales erunt. Rursus, quia est, ut* a c *ad* d f, *ita* b c *ad* e f: *& permutando, ut* a c *ad* b c, *ita* d f *ad* e f; *erunt hæ, ut illæ potentia tantum commensurabiles Et quia etiam sunt rationales;*

δ 74. X. ᵟ*Erit reliqua* d e *Apotome; & quidem ordine eadem cum* ab. *Si enim posit* a c *plus quàm* b c *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis:* ε *etiam*

ε 15. X. d f *quàm* e f. *Si jam* a c *tota fuerit rationali positæ longitudine commensurabilis,* ζ *erit &* d f, *&*

ζ 12. X.

η 14. X. *sic* Apotome prima; *Si verò congruens* b c, *etiam* e f; *& sic* Secunda: *si neutra, etiam neutra, & sic* Tertia. *Sed si* a c *plus posit, quàm* b c *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis;* η *Ergò etiam* d f *quàm* e f; *sique* a c *tota fuerit rationali positæ longitudine commensurabilis;* ε *erit &* d f; *& sic* d e *eodem modo* Apotome quarta: *Si verò congruens* b c, *etiam* e f; *& sic* Apotome quinta, sexta *& ostenditur prout* a b.

Scholium.

Eædem observationes, ad 67, de potentia commensurabilibus sunt additæ, possunt huc quoque transferri.

PROPOS: CV.

Theorema 81.

Recta

Recta linea *de* Mediæ Apotomæ *ab* commensurabilis, & ipsa *de* Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.



Mediæ apotomæ a b *congruat* b c, *ut* a c, b c, *sint Mediæ potentia tantùm commensurabiles: & ipsi* a b *sit* d e *commensurabilis vel longitudine vel potentia tantùm: Factis ijsdem quæ in præcedenti, α erunt* b c, e f: *&* a c, d f *eodem modo vel longitudine vel potentia commensurabiles prout* a b, d e *fuerint. Cumq́;* a c, b c *sint Mediæ, etiam* d f, e f *ipsis commensurabiles β Mediæ erunt. Rursus cum sit, ut* a c *ad* d f, *ita* b c *ad* e f: *& permutando; ut* a c *ad* b c *ita* d f *ad* e f; *erunt hæ, ut illæ, potentia tantùm commensurabiles: & quia etiam Mediæ, γ erit* d e *reliqua Mediæ apotome, & quidem ordine eadem cum* a b. *Quoniam est, ut* a c *ad* c b; *ita* d f *ad* e f: *& ut* a c *ad* c b, *δ ita quadratum* a c *ad rectang.* a c b: *ita ergò etiam erit quadratum* d f *ad rectang.* d f e; *& permutando, ut quadratum* a c *ad quadratum* d f, *ita rectangulum* a c b *ad rectang.* d f e; *& hæc, ut illa, commensurabilia. Si itaq; rectangulum* a c b *fuerit rationale, ε erit &* d f e; *&* d e Mediæ *ζ* Apotome prima: *Sed si Medium, Medium & & ζ* d e Mediæ apotome secunda.

α 10. X.
β 24. X.
γ 75 vel 76. X.
δ 3. Lemma 19. X.
ε 75. X.
ζ 76. X.

PROPOS: CVI.

Theorema 82.

Recta linea *de* Minori *ab* commensurabilis, & ipsa *de* Minor est.

Minori a b *congruat* b c, *ut* a c, b c *sint potētia incommensurabiles facientes ex suis quadratis compositum rationale, rectangulum verò Mediū; sed ipsi* a b *sit* d e *cōmensurabilis sive longitudine, sive potentia tantum. Factis ijsdem, quæ in prioribus, erunt* d f, e f *ipsis* a c, b c *eodem modo ut in* 105. *commensurabiles. Cumq; sit, ut* a c *ad* d f; *ita* b c *ad* e f; *& permutando, ut* a c *ad* b c; *ita* d f *ad* e f; α *Ergò, ut quadratum* a c, *ad quadratum* b c; *ita quadratum* d f *ad quadratum* e f; *& componendo; ut compositum ex quadratis* a c, b c, *ad quadratum* b c, *ita compositum quadratorum* d f, e f *ad quadratum* e f; *& permutando, ut compositum ex quadratis* a c, b c, *ad compositum ex quadratis* d f, e f; *ita quadratum* b c *ad quadratum* e f; β *Ergò ut hæc sibi, ita illa sibi commensurabilia erunt. Sed compositum ex quadratis* a c, c b *est rationale: Ergò & ex* d f, f e *compositum. Rursus, quia, ut in* 105. a c b *&* d f e *sunt commensurabilia, hoc, ut illud,* γ *erit Medium. Deniq; cum sit, ut* a c *ad* b c, *ita* d f *ad* e f; *Sed* a c, b c *sint potentia incommensurabiles; erunt &* d f, e f: *Quæ cum faciant ex suis quadra-*

α 22. VI.

β 10. X.

γ cor. 24. X

quadratis compositum rationale; rectangulum vero sub ijsdem d f, e f Medium, erit d e Minor. 77. X.

PROPOS: CVII.

Theorema 83.

Recta linea *d e* commensurabilis ei *a b*, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa *d e* cum Rationali Medium totum efficiens est.

Recta a b *cum rationali Medium totum efficienti, congruat* b c; *ut* a c, b c *potentia sint incommensurabiles, facientes compositum quadratorum Mediū, rectangulum verò rationale; sitque* d e *ipsi* a b *quocunque modo commensurabilis. Factis ijsdem, quæ in prioribus, ostenditur, ut in 106, compositū ex quadratis* a c, b c, *composito quadratorū* d f, e f *commensurabile esse. Cumque illud ponatur Medium, erit & hoc Medium. Rursus ostendetur etiam rectangulum* a c b *commensurabile esse rectangulo* d f e, *& hoc, ut illud Rationale, ex 105. Sunt denique* d f, e f *eodem modo, ut in 106, potentia incommensurabiles; quæ cum ex suis quadratis compositum efficiant Medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; erit* d e, quæ cum Medio rationale efficit. 78. X.

PROPOSITIO CVIII.

Theorema 84.

Recta linea *d e* commensurabilis ei *a b*, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa *d e* cum Medio Medium totum efficiens est.

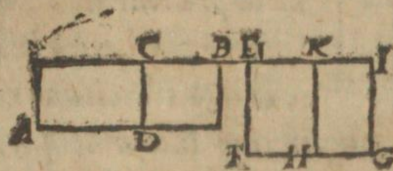
Rectæ a b *cum Medio Medium totum efficienti congruat* b c, *ut* a c, b c *potentia sint commensurabiles, facientes compositum quadratorum Medium & rectangulum Medium incommensurabile composito quadratorum. Factis ijsdem, ut antea, ostenditur ut in 106, compositum ex quadratis* a c, b c *composito quadratorum* d f, e f *commensurabile esse; quorum illud, cum sit Medium, etiam hoc est Medium. Rursus, ut in 105, rectangulum* a c b *rectangulo* d f e *commensurabile, & hoc, ut illud, Medium ostenditur: Sunt etiam* d f, e f, *ut in 106. potentia incommensurabiles. Deniq; et-*
α 14. X. *iam ut compositum ex quadratis* ac, bc *incommensurabile est rectangulo* a c b, *ex hypothesi; α ita compositum ex quadratis* d f, e f *rectangulo*
β 79. X. d f e. *β Ergò est* d e, quæ cum Medio Medium totum efficit.

PROPOSITIO CIX.

Theorema 85.

Medio *db* à Rationali *ab* detracto; Recta linea, quæ reliquum spaciũ *a c* potest, una ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome vel Minor.

Ad



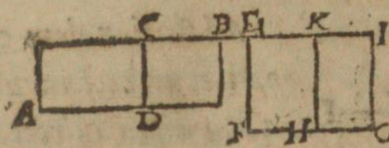
Ad Rationalem e f *applicetur rectangula* eh, kg *æqualia rectangulis* ac, d b *ut totum* i *sit æquale toti rationali* a b; *α eritq;* e i *rationalis rationali* e f *longitudine commensurabilis; & quia* k g *Medio* d b *est æquale, erit* k i *rationalis longitudine β incommensurabilis rationali* e f *γ Itaq;* e i, k i *sunt longitudine incommensurabiles, & sic rationales potentia tantùm commensurabiles; ipsaq;* e k *δ apotome & congruens* k i. *Si jam* e i *plus potest quàm* k i *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, erit* e k *Apotome prima, atq; sic recta potens spacium* f k *contentum sub rationali* e f *& apotome prima. id est,* a c *est ε Apotome. Si verò plus potest quadrato rectæ incommensurabilis, cum tota* e i *posita* e f *longitudine sit commensurabilis, erit* e k *Apotome quarta, & recta potens spacium* e k *sub rationali* e f *& apotoma quarta* e k *erit ζ Minor.*

α 21. X.
β 23. X.
γ 13. X.
δ 74. X.
ε 92. X.
ζ 95. X.

PROPOSITIO CX.

Theorema 86.

Rationali *db* à Medio *ab* detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum rationali Medium totum efficiens.



Constructis iisdem, ut in præcedenti; quia f i *medio* a b *est æquale erit*, e i *latitudo rationalis rationali* e f *longitudine incommensurabilis*; k i *verò* β *commensurabilis, quia* h i *rationali* d b *est æquale*: *Itaq;* e i, k i *rationales potentia tantū commensurabiles & reliqua* e k γ *apotome, eiq; congruens* k i. *Si* e i *plus posit quàm* k i *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & congruens* k i *commensurabilis longitudine rationali* e f, *erit* e k *apotome secunda; quare recta potens spacium* e k *contentum sub rationali* e f, *& apotome secunda*; δ *erit* Mediæ Apotome prima. *Si verò plus quadrato rectæ longitudine incommensurabilis, erit* e k *apotome quinta; & recta potens hoc spacium* f k *contentum sub rationali & apotome quinta*, ε *erit* cum rationali Medium totum efficiens.

α 23. X.
β 21. X.
γ 74. X.
δ 93. X.
ε 96. X.

PROPOSITIO CXI.

Theorema 87.

Medio *db* à Medio *ab* detracto, quod *db* sit cōmensurabile *ab* toti; *ab* reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda; vel cum Medio Medium totum efficiens.

Constru-

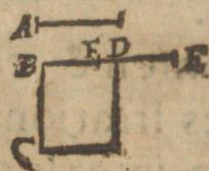
Constructis ijsdem, ut antea; α erunt e l, k i *rationales rationali* e f *longitudine incommensurabiles. Sed cum* f i, h i *ipsis* a b, d b *æqualia ponantur incommensurabilia, erunt* e i, k i *longitudine incommensurabiles, & sic rationales potentia tantùm commensurabiles; & reliqua* e k *β apotome. Si ergò* e i, *plus possit quàm* k i *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & utraq;* e i, k i *rationali* e f *sit incommensurabilis, ut patet, erit* e k *apotome tertia & recta potens spacium* f k *contentum sub rationali* e f *& apotoma quarta* e k, *γ erit* Mediæ Apotome Secunda: *Si verò plus potest quadrato rectæ longitudine incommensurabilis, erit* e k *apotome Sexta; & recta potens spacium* f k *contentum sub rationali & apotoma Sexta, δ erit ea* quæ cum Medio Medium totum efficit.

α 23. X.
β 74. X.
γ 94. X.
δ 97. X.

PROPOSITIO CXII.

Theorema 88.

Apotome a non est eadem, quæ ex binis nominibus.



Rationali b c *posita applicetur rectangulum* c d *æquale quadrato* a. *Quoniam ergò* a *est apotome, α erit* b d *apotome prima; cui congruat* d e. *Erunt*

α 98. X.

b e, d e *ex definitione apotomæ primæ rationalis potentia tantùm commensurabilis; quarum prior positæ commensurabilis longitudine, plus poterit quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Rursus, quia & a ponitur esse ex binis nominibus,*
β 61. X. *eadem latitudo* b d β *erit ex binis nominibus prima. Sit autem majus nomen* b f. *Ergò ex definitione binomij primi* b f, f d *sunt rationales potentia solùm commensurabiles, quarum prior posita existens longitudine commensurabilis, plus potest quàm* f d *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Itaq;, cum tam* b e, *quàm* b f *longitudine*
γ 12. X. *sint commensurabiles eidem* b c, γ *erunt quoq;* b e, b f *inter se commensurabiles longitudine: Ergò & eadem* b e, *reliquæ parti* f e *longitudine*
δ 16. X. δ *commensurabilis est, &* f e *ut* b e *rationalis erit. Sed quia duarum commensurabilium longitudine* b e, f e, *una* b e *ipsi* d e *est*
ε 14. X. *incommensurabilis,* ε *erit & altera* f e *eidem* d e *incommensurabilis longitudine; & sic* f e, d e *sunt rationales potentia solùm commensurabiles. Itaq;*
ζ 74. X. f d *reliqua est* ζ *apotome & sic irrationalis, quæ antea erat rationalis. Non ergò* a *existens Apotome, est eadem quæ ex binis nominibus.*

Corollarium.

Ex his colligitur Apotomen & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas neq; Mediæ neq; inter se esse easdem.

Nam

Nam quadratum Mediæ ad rationalem lineam applicatum, latitudinem α efficit rationalem, positæ longitudine incommensurabilem. Quadratum autem apotomæ ad rationalem applicatum, latitudinem β facit apotomen primam; quadratum Mediæ apotomæ primæ, γ apotomen secundam; Mediæ apotomæ secundæ δ Apotomen tertiam: Minoris, ε apotomen quartam: Ejus, quæ cum rationali Medium totum efficit, ζ apotomen quintam: Ejus, quæ cum Medio Medium totum efficit, η apotomen sextam. Cum itaq; hæ latitudines differant à Mediæ latitudine, quia hæc rationalis, illæ irrationales sunt; & inter se, quia ordine non sunt eædem apotomæ, patet Apotomen & reliquas illam consequentes, & à Media & inter se differre.

α.23. X.
β 98. VI.
γ 99. X.
δ 100. X.
ε 101. X.
ζ 102. X.
η 103. X.

Cum verò, ut in hoc Theoremate ostensum est, Apotome non sit eadem, quæ ex binis nominibus: quadrata autem apotomæ & reliquarũ ipsum consequentiũ faciant latitudines; Apotomen primam, secundam, tertiã, quartã, quintã, sextã: Sed quadrata Binomialis & reliquarum consequentiũ faciant latitudines ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, 6tã; constat, latudines Apotomæ & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem non esse, latitudinibus ejus, quæ ex binis nominibus & reliquarum post ipsam Irrationalium; adeoq; inter se differre. Quare, cum & hæ & illæ à Media differant, patet, rationali positæ Medium Irrationales esse lineas inter se differentes, de quibus hactenus.

1. est Media. 2. Ex binis nominibus cum 6. speciebus. 3. ex binis Medijs prima. 4. ex binis Mediis secunda. 5. Major. 6. Rationale ac Medium potens. 7. Bina Media potens. 8. Apotome cum sex speciebus. 9. Mediæ apotome prima, 10. Mediæ apotome secunda. 11. Minor. 12. Cum rationali Medium totum efficiens. 13. Cum Medio Medium totum efficiens. *Pergit jam Euclides expositis Irrationalium proprietatibus, inter se conferre Apotomas & binomiales propos. 113. 114. 115.*

PROPOSITIO CXIII.

Theorema 89.

Quadratum Rationalis *a* ad eam *bc*, quæ ex binis nominibus *bd*, *cd*, applicatum *be*, latitudinem *bf* facit apotomen, cujus nomina tota *fk* & congruens *bk* commensurabilia sunt nominibus *bd*, *dc*, ejus, quæ ex binis nominibus & in eadem proportione, & adhuc Apotome *bf*, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea *bc*, quæ ex binis nominibus.

Ad nomen minus dc *recta* bc, *applicetur eidem.*



dem quadrato rationalis a, rectangulum cg æquale, sitq; bh æqualis ipsi dg. Cum ergò cf, cg sint æqualia, α erit, ut bc ad dc, ita dg, id est bh ad bf; & dividendo: ut bd ad dc, ita fh ad bf: eritq; fh major quàm bf, sicut bd major est quàm dc. Sumta fi ipsi fb æquali, β fiat, ut hi ad if; ita fb ad bk: & componendo, ut hf ad fi, id est, fb; ita fk ad bk. Ostensum verò est, esse, ut hf ad bf, ita bd ad df. Sed hæc sunt nomina binomialis, rationales potentia tantùm commensurabiles. γ Ergò & hf, bf sunt potentia commensurabiles. Rursus, quia est, ut hf ad bf; ita fk ad bk: δ erunt hf, fk antecedentes simul, id est, hk tota; ad consequentes fb, bk simul, id est, bk, ut hf ad bf. Quare ut hk prima ad bk secundam, ε ita quadratum primæ ad quadratum secundæ. Sed cum cg sit rationale, utpote quadrato rationalis a æquale, rationali dc applicatum ζ faciens dg rationalē ipsi cd longitudine commensurabilē; erunt hb, id est, dg & dc rationales longitudine commensurabiles. Cumq; sit ostensum, esse, ut bd ad dc, ita fk ad bk, & ut fk ad bk, ita hk ad fk. η Ergò, ut quadratum bd ad quadratum dc, ita quadratum hk ad quadratum fk. Et sic commensurabilia sunt hæc atq; illa. Sed fuit, ut quadratum

α 14. vel 16. VI.
β 12. VI.
γ 10. X.
δ 12. X.
ε 20. VI.
ζ 21. X.
η 22. VI.

hk, *ad quadratum* fk; *ita recta* hk *ad* bk: γ *ideoq; sunt longitudine cõmensurabiles inter se &* *reliquæ* bh. *Sed* bh *est ostensa rationalis: Er-*
δ cor. 16. X *gò &* hk *ipsi commensurabilis est rationalis,* *quare &* hb, hk *rationales erunt. Cum itaq;* fk *ipsi* bk *potentia tantùm commensurabilis sit,* *erit &* fk *rationalis. Quare cum* fk, bk *sint ra-* *tionales potentia tantùm commensurabiles, erit*
κ 74. X. *reliqua* bf κ *apotomæ, congruens,* bk. *Quod primũ.* *Cumq;* hb, bk *ostensæ sint longitudine inter se*
λ 16. X. *commensurabiles;* λ *ergò & ipsi* hk: *ipsaq;* hb
μ 12. X. *sit longitudine commensurabilis* dc, *erit eidem* dc *longitudine commensurabilis* bk. *Rursus,* *quia est, ut* bd *ad* dc, *ita* fk *ad* bk, *& permu-* *tando, ut* bd *ad* fk; *ita* dc *ad* bk; γ *itaq; ut* *hæ, ita & illæ sunt longitudine commensurabiles; e-* *runtq; ipsius* bf *Apotomæ nomina* fk, bk, *nomini-* *bus* bd, dc *binomialis longitudine commensura-* *bilia Quod secundũ. Rursus, quia est, ut* bd *ad* dc *ita* fk *ad* bk; *erũt apotomæ* bf *nomina* fk, bk *in* *eadem ratione cũ* bd, dc *nominib. ipsius* bc *Bino-* *mialis. Quod est tertium. Deniq; vel* bd *plus potest* *quàm* dc *quadrato rectæ sibi longitudine commen-*
ν 15. X. *surabilis vel incommensurabilis. Si cõmensurabilis,* *cum sit, ut* bd *ad* dc, *ita* fk *ad* bk, ν *poterit et-* *iam* fk *plus quàm* bk *quadrato rectæ sibi longi-* *tudine commensurabilis. Si incommensurabilis, po-* *terit plus quadrato rectæ longitudine incommen-* *surabilis. Quare, si rationali positæ longitudine*

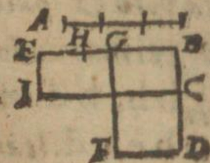
com-

commensurabilis fuerit b d, erit & f k, quare vel prima vel quarta apotome erit, cum illa prima vel quarta sit: Si d c, etiam b k, quare secunda vel quinta: Si neutra b d, d c, etiam neutra f k, b k, quare tertia vel sexta. Ergò apotome eadem ordine cum Binomiali.

PROPOSITIO CXIV.

Theorema 90.

Quadratū Rationalis *a* ad Apotomen *bc* applicatum *bi*, latitudinem *be* facit eā, quæ ex binis nominib. *bg*, *ge* cujus nomina *bg*, *ge* commensurabilia sunt nominib. *b d*, *cd*, Apotomæ *b c*, & in eadem proportione ut *b d* ad *cd*, ita *b h*, ad *he*, & adhuc, quæ *b e* ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome *b c*.



Applicetur ad b d, b f *rectangulum æquale ipsi* bi *faciens latitudinem* b g. *a Erit ut* be *ad* bg, *ita* b d *ad* b c; *& convertēdo, ut* b e *ad* g e, *ita* b d *ad* cd. a 14, vel 16. VI.

b Secetur etiam ge *ad* h *juxta proportionem* be *ad* g e. *Quia est, ut* be *tota ad* g e *totam, ita* e h *ex* be *ablata, ad* hg *ex* g e *ablatam. Erit ergò etiam reliqua* bh *ipsius* b e, *ad reliquā* h e *ipsius* ge, *ut tota* be, *ad totam* g e. *Sed ut* b e *ad* ge, *ita erat* eh *ad* hg. *Ergò ut* bh *ad* he, *ita* eh *ad* hg, *ipsaq;* e h *est media proportionalis inter* b h, g h: b 10. VI.

c Quare

γ Quare ut b h prima ad g h tertiam, ita qua-
γ cor. 20. VI. dratum primæ, ad quadratum tertiæ. Quia autem fuit, ut b d ad c d; ita b e ad g e, id est, b h ad h e; Sunt autem b d, c d nomina apotomæ b c rationales potentia solùm commensurabiles; δ e-
δ 10. X. runt etiã b h, h e & ex his quadrata cõmensurabilia; adeoq; b h, h e propter quadrata cõmensu-
ε 16. X. rabilia lõgitudine ε cõmensurabiles; & tota b h longitudine cõmensurabilis parti g h, etiã ipsi b g longitudine commensurabilis erit. Sed cum quadrato rationali æquale rationale b f sit applicatũ ad
ζ 21. X. rationalẽ b d ζ erit b g latitudo rationalis lõgitudine ipsi b d cõmensurabilis: Eidem ergò & b h lon-
η Scho. 12. X gitudine commensurabilis η erit & rationalis. Quare cum b h, h e sint ostensæ potentia solum commensurabiles, & b h rationalis; erit & h e rationalis; & sic b h, h e, sunt rationales potentia
θ 37. X. solùm commensurabiles, θ ipsaq; b e ex binis nominibus. Quod primum est. Quia verò & patet esse b h ad h e, ut b d ad c d; & permutando, b h ad b d, ut h e ad c d, Suntq; b h, b d longitudine commensurabiles: δ Ergò & h e, c d. Itaq; nomina b h, h e binomialis b e, nominibus b b, c d Apotomæ b c longitudine sint cõmensurabilia. Quod secundũ. Imò & in eadem ratione, cum sit ut b h ad h e, ita b d ad c d. Quod est tertium. Deniq; b d plus potest, quàm c d quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si commensurabilis, etiam b h plus potest quàm h e

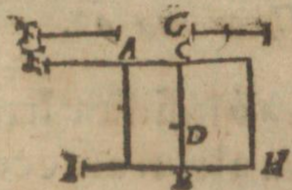
quadrato

quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, Si incommensurabilis, incommensurabilis; unde ordine sex binomia singula ejusdem ordinis cum apotomis inveniuntur. Quod est quartum.

PROPOSITIO CXV.

Theorema 91.

Si spacium *ab* contineatur sub Apotoma *ac* & ea *cb* quæ ex binis nominibus, cujus nomina *cd*, *db*, commensurabilia sunt nominibus *ce*, *ae*, Apotomæ *ac*, & in eadem proportione, ut *cd* ad *bd*, ita *ce* ad *ae*, recta linea *f* spacium *ab* potens est Rationalis.



Quadrato rationalis g *æquale rectangulum* ch *applicetur ad* cb, *erit* bh *apotome, cujus* a 113.X. *nomina* hi, bi *sint longitudine commensurabilia nominibus* cd, db, *& in eadem ratione, nempe* hi *ad* bi, *ut* cd *ad* db, *adeoq; ut* ce *ad* ae:

&

ζ 19. V. & permutando, ut tota h i ad totam c e, ita ablata b i ad ablatā ae. ζ Ergò & reliqua b h ad reliquam a c, ut h i ad c e. Quæ cum γ sint commensurabiles longitudine, quia utraq; ipsi c d longitudine commensurabilis est, δ erunt & h b, a c & h c ipsi a b cum sint in ε eadem ratione. Sed h c æquale quadrato rationalis g est rationale. Ergò & a b ipsi commensurabile est rationale, & ipsum potens recta f rationale.

γ 12. X.

δ 10. X.

ε 1. VI.

Corollarium.

Constat hinc, rationale spacium includi posse duabus Irrationalibus ut hic binomiali & apotomæ inclusum est rationale *a b*.

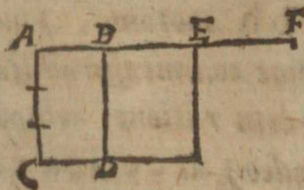
PROPOS: CXVI.

Theorema 92.

A Media *a b* infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

α 38. X. Lemma.

β 11. def.



Sub rationali ac *& Media*, ab *comprehensum spacium* a d α *Irrationale possit* be β *Irrationalis quæ nulli 13 Irrationaliū eadē erit.*

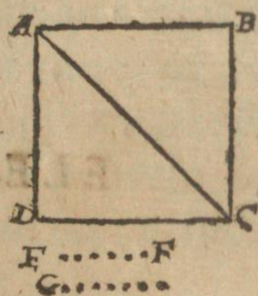
Medium

Medium enim ad rationalẽ applicatũ γ, faceret latitudinẽ rationalem; reliquarum 12, Irrationaliũ quadrata applicata ad rationalem facerent latitudines vel binomiales vel apotomas. Sed Quadratum b e *applicatum ad* a c *facit latitudinem* a b *Mediã differentem à reliquis omnibus Irrationalium quadratorum latitudinibus. Ergò* b e *Irrationalis differt ab illis 13 Irrationalibus. Si autem compleatur rectangulum* d e, *erit illud sub rationali, & irrationali cõprehensum Irrationale, quod cum possit* e f, *β erit & hæc irrationalis, & differt à reliquis omnibus Irrationalibus. Cum enim hujus quadratum applicatum ad rationalem* b d, *faciant latitudinem* b e *distinctam à reliquarum Irrationalium quadratorum applicatorum latitudinibus, ut patet ex præcedentibus, ipsam quoque* e b *Irrationalem peculiarem à reliquis esse oportet.*

γ 23. X.
δ à 61. ad 66. X. & à 97. ad 103. X.

PROPOS: CXVII.

Theorema 93.



Propositum sit nobis ostẽdere, in quadratis figuris *d b* diametrum *a c* lateri *ab* incommẽsurabilem esse longitudine.

Si non

Si non, esto commensurabilis habeantq; a c a b proportionem quam e f & g numeri suæ rationis minimi & primi: quarum g unitas non erit

a 47. I. (*Cum enim ex* a c *quadratum* a *sit duplum quadrati* a b, *sitq; ut quadratum* a c *ad quadratum* a b, *ita numerus quadratus ex* e f, *ad quadratum numerum ex* a g, *erit etiam ille hujus duplus; ideoq; si* g *esset unitas, esset ipsius quadratum unitas, numerusq; quadratus ex* e f *binarius, quod absurdū;*) *Sed numerus. Et quia, ut jam ostensum est,*

b 14. IIX. *ex* e f *est duplus quadrati ex* g; b *metietur quadratus ex* g *quadratum ex* e f *& latus* g *metietur latus* e f. *Cum verò* g *etiam metiatur seipsum, erunt* e f *&* g *numeri inter se compositi, habentes communem mensuram* g: *qui tamen inter se erant primi. Quod absurdum. Non ergò* a c *& a b inter se commensurabiles sunt.*





ELE-



ELEMENTORUM EUCLIDIS.

LIBER XI.

Definitiones.

I.

SOlidum est, quod longitudinem & latitudinē & crassitudinem habet.

2. Solidi autem extremum est superficies.

3. Linea recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

4. Planum ad planum rectum est cum rectæ lineæ quæ communi pla-

norum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur alteri plano ad rectos sunt angulos. Hoc enim modo non magis inclinabit in unam partem quam in alteram, sed æqualiter illi insistet.

5. Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpēdicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodē est plano, altera recta linea fuerit adjuncta; est, inquā angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

6. Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis Lineis contentus, quæ in utroq; planorum ad idem sectionis cōmunis punctū ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

7. Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur atque alterum ad alterum, cum dicti intersectionū anguli inter se fuerint æquales.

8. Paral-

8. Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

9. Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

10. Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

11. Solidus angulus est plurium quã duarũ linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadẽ sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. vel: solidus angulus est, qui plurib. quã duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

12. Pyramis est figura solida, quæ planis cõtinetur ab uno plano ad unum punctũ constituta. Potest autẽ illud unũ planũ, à quo omnia tendunt, esse vel triangulum vel quadrangulũ, vel pentag. Unde Pyramis vel triangula, vel quadrãgula solet dici. Reliqua omnia ad unum punctum constituta sunt triangula numero respondentia lateribus plani.

13. Prisma eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum adverſa duo ſunt & æqualia & ſimilia & parallela; alia verò parallelogramma. *Eſt nimirum columna quædam laterata æqualis craſſitudinis, cujus baſes oppoſitæ ſunt æquales, ſimiles & parallelæ, ſive hæ ſint triangula, ſive quadrata, ſive pentagona. Itaque tot continebit parallelogramma quodlibet Priſma, quot latera ſive anguli in unò quoq; oppoſitorum planorum reperiuntur.*

14. Sphæra eſt, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus, in ſeipſum rurſum revolvitur, unde moveri cæperat, circumaſſumta figura: vel, Sphæra eſt figura ſolida, una ſuperficie comprehenſa, ad quam, ab uno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

15. Axis autem ſphæræ eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus convertitur.

16. Cen-

16. Centrum Sphæræ est idem, quod est semicirculi.

17. Diameter autem sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinq; à sphæræ superficie terminata.

18. Conus est, quando rectanguli manēte uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur. Unde moveri cæperat circumassumtâ figurâ. Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, orthogonius erit conus. Si verò minor, amblygonius: Si verò major, Oxygonius: tum enim angulus ad verticem vel rectus fit, vel obtusus, vel acutus.

19. Axis autem coni, est quiescens illa linea, circa quā triangulum vertitur.

20. Basis verò coni, est circulus, qui à circumducta recta describitur.

21. Cylindrus est, quando rectangu-

li parallelogrammi manente uno latere, eorum, quæ circa rectū angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur, unde cæperat moveri, circumassumptâ figurâ.

22. Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quàm parallelogrammum convertitur.

23. Bases verò clylindri, sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

24. Similes coni & clyndri, sunt, quorum & axes & basium diametri proportionales sunt.

25. Cubus est figura solida, sub sex quadratis æqualibus contenta.

26. Tetraedrum, est figura solida, sub quatuor triangulis æqualibus & æqui lateris contenta.

27. Octaedrum, est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æqui lateris contenta.

28. Dodecaedrum, est figura solida, sub

da, sub 12. pentagonis æquilateris & æquiangulis contenta.

29. Icosaedrum, est figura solida, sub 20. triangulis æqualibus & æquilateris contenta. *Hæc 5. corpora sola appellant regularia. Quia omnia plana quibus continentur, sunt æqualia æquilatera & æquiangula quorum constructiones in decimo tertio libro docebuntur.*

30. Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverso, parallelæ sunt, contenta. *Horum tot sunt genera, quot sunt parallelogrammorum, ut cubus, altera parte longius, Rhombus, Rhomboides.*

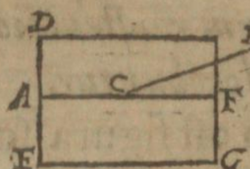
31. Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel deniq; in planis figuræ, cui inscribitur.

32. Solida figura, solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel deniq; plana figuræ circumscriptæ, tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam verò in sublimi.



Sit, si potest, a c *pars in plano* d g, *pars* c b *extra planum. Si ergò continuetur* a c *in illo plano* d g *usq; in* f, *erunt eidem* a c *lineæ duæ di-*
a 14. I. *versæ* c b, c f *ad eandem partem adjectæ, quod* a *absurdum.*

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si duæ rectæ lineæ *a b, cd*, se mutuo secent *in e* uno sunt plano. Atque triangulum omne *efg* in uno est plano.



In lineis a b, c d *connectantur puncta* f, g, *ut fiat triangulum* f e g, *cujus si pars quædam, ut* h i f, *dicatur esse extra illud planum, erunt linearum* e f, fb *partes, supra partes in plano,* a *quod absurdum. Quod*
a 1. XI. *si jam totum triangulum* e f g, *est in eodem plano,*

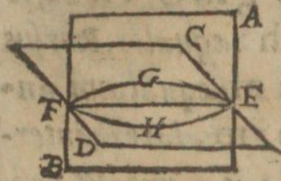
oportet

oportet & ipsius terminos, lineas e f, e g, *α adeoq́; quarum sunt partes,* a b, c d, *totas, in eodem plano esse.*

PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si duo plana *ab, cd*, se mutuo secent; communis eorum sectio *ef* est linea recta.

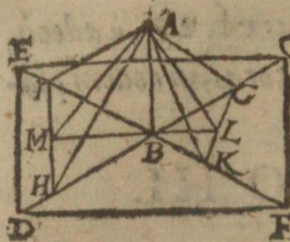


Si quis e f *lineam neget in utroq; plano existere, erit vel in neutro, & intra terminos* e *&* f *ducta in alterutro planorum recta* e g f: *includent rectæ* e f *&* e g f *figuram, quod α absurdum; vel in alterutro, intraq; eosdem terminos ducta in altero recta* e g f, *idem sequetur absurdum.* α 14. ax. I.

PROPOSITIO IIII.

Theorema 4.

Si recta linea *a b*, rectis duabus *c d*, *e f* lineis semutuo secantibus, in cōmuni sectione *b* ad angulos rectos insistat: illa *a b* ducto etiam per ipsas plano *c d*, *e f* ad angulos rectos erit.



Quia enim se mutuo secant c d, e f *lineæ*, α *erunt in eodem plano. Sumptis* b g *&* b h, *itemq;* b i *&* b k *æqualibus, ductisq;* g k, i h *&* l m, *quæ in punctis* l *&* m *illas duas* g k, i h *secet; demittantur ex* a *puncto sublimi* a g, a l, a k, a h, a m, a i. *Cum ergò latera* b g, b k, *trianguli* b g k *æqualia sint lateribus* b h, b i, *trianguli* b h i, *cum angulo compre-*

β 15. I. *henso ad* b β *æquali. Erunt &* g k, *&* i h *bases*

γ 4. I. γ *æquales. Anguliq;* b k g, *&* b h i *æquales. Rursus cum in triangulis* b k l, *&* b i m, *æqualium angulorum ad* β b, *&* l k b *ipsi* b i m, *latera interjacentia* b k, b i, *sint* δ *æqualia;* ε *erunt & reliqua latera* k l, l b, *reliquis* i m, m b *æqualia. Eodemq; modo in triangulis* δ *rectangulis* a b g, a b h,

δ ex constr. *æqualium laterum* b g *&* b h, *&* a b *communis;* *etiam* a g, a h *bases fiunt* γ *æquales. Sicut &* a i

ε 26. I. *&* a k. *Amplius in triangulis* a k g *&* a i h *æqualium laterum* g k *&* i h, a k *&* a i, *& basium* a g

ζ 8. I. *&* a h; ζ *erunt anguli cõprehensi* a i h, a k g *æquales. Itaq; cum in triangulis* a k l, *&* a i m, *æquales angulos* i *&* k *comprehendentia latera sint æqualia;* γ *erunt & bases* a l, a m *æquales. Deniq; cum in triangulis* a b l *&* a b m, *æqualia sint latera* b l *&* b m; *&* a b *commune; & bases* a l, a m ζ *erunt; & anguli ad* b *æquales; & quia deinceps*

η 10. def. *etiam* η *recti. Erit ergò recta* a b *perpendicularis*

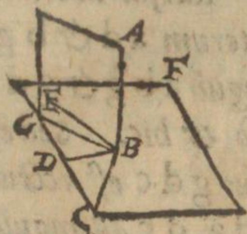
ipsi

psi l m; adeoq; omnibus ipsam tangentibus in plano c e, d f, ipsi etiã plano c e d f ζ perpendicularis.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si recta linea *ab*, rectis tribus lineis *bc*, *bd*, *be*, se mutuo tãgentibus in cõmuni sectione ad rectos angulos instat; illæ tres rectæ in uno sũt plano.



Cum quælibet duarũ illarũ per sectionẽ mutuam, α *sint in eodẽ plano, ut* bc, bd, *in plano ut* bc, bd *in plano* fc; *ponatur, si potest tertia* α be *extra planum illud in sublimi* α 2. XI.

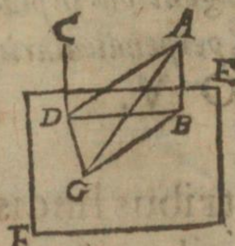
Quoniam a b, b e *sunt* α *in eodẽ plano, sint in plano* ae. *Quoniã ergò plana* fc, a e, *sibi mutuo occurrũt in* b *necessariò productæ se mutuo secabunt, &* β *quidem sectione cõmuni* bg. *Sed quia* a b *ponitur ad angulos rectos ipsis* b c, b d; γ *erit etiam plano* fc, *per ipsas ducto, ad angulos rectos;* δ *Et sic etiam rectæ* b g, *quæ ipsam in* b *tangit. Itaq; duo recti anguli* ab g, abe *in eodem plano* a g *constituti, pars & totum erunt æqualia.* β 3. XI. γ 4. XI. δ 3. def. XI.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duæ rectæ lineæ *ab*, *cd*, eidem plano *ef* ad rectos sint angulos, parallelæ erunt rectæ illæ lineæ.

Ducta



Ducta b d *in plano* e f; *erunt anguli* d *&* b α *recti in eodẽ plano* e f. *Ducatur* d g *perpẽdicularis ad* b d, *æqualis ipsi* ab: *connectaturq́;, rectæ* b g, a g, da. 1ã *in triangulis* a b d, b d g β *æqualium laterum* a b *&* d g; *&* b d *communis cum angulo comprehenso recto*; γ *erunt etiam bases* b g, a d, *æquales.* *Rursus in triangulis* a b g, a d g *æqualium laterum* a d *&* b g, *& basis communis* a g; *erunt anguli* a b g *&* g d a δ *æquales. Sed ille* α *rectus. Ergò & hic.* *Sed ex eadem definitione etiam angulus* g d c *est rectus.* *Erit ergò* g d *tribus rectis* d b, d a, d c *ad angulos rectos. Quare rectæ* d b, d a, d c *in uno sunt plano. Est* ζ *autem* a b *in eodem plano, in quo*, d b, d a. *Itaq́; recta* c d *in eodem erit plano cum* a b. *Sed cum interni anguli* b *&* d *sint recti*; η *Erunt* a b, c d *parellelæ. Quod erat propositum.*

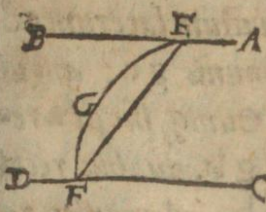
α 3. def. XI
β ex constr.
γ 4. I.
δ 8. I.
ε 5. XI.
ζ 2. XI.
η 28. I.

PROPOS: VII.

Theorema 7.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ *a b, c d*, in quarum utraque sint quælibet puncta *e, f*; illa linea *e f* quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem est cum parallelis plano.

Sin

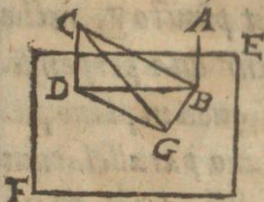


Sin minus, recta e f, *est in eodem plano, sed extra, ut quidem aliud secet planum, cujus cum plano harum parallelarum communis sectio sit* e g f *α recta. Itaq; duæ rectæ* e f *&* e g f *intra eosdem terminos* e *&* f *includunt superficiem. Quod β absurdum. Vera etiam est propositio de non parallelis in eodem plano.* α 3. XI. β 14. ax. I.

PROPOS: VIII.

Theorema 8.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ *ab, cd*, quarum altera *cd* ad rectos cuidam plano *ef* sit angulos, & reliqua *ab* eidem plano *ef* ad rectos angulos erit.



Ductâ b d, *angulus* c d b *fit α rectus. Sed* c d b, *&* a b d *sunt β duobus rectis æquales. Ergò &* a b d *est rectus Ducatur in plano* e f *perpendicularis* b g *ad* b d, *æqualis ipsi* c d; *junganturq;* g d, g c, b c. *Iam in triangulis* c d b, g b d, *rectangulis, æqualium laterum* g b, c d, *& communis* b d, *γ Erunt & bases* g d, b c *æquales. Sic* α 3. def. XI. β 29. I. γ 4. I.

in

in triangulis c d g & c b g æqualium laterum c d, b g & b c, g d & baseos communis g c: anguli d c g & c d g δ sunt æquales. Cumq; hic sit α rectus. Ergò & ille. Quare recta g b, duabus rectis b d, b c se mutuo secantibus in b, ad angulos rectos insistit, & sic plano per b d, b c ducto ε erit ad angulos rectos. In quo plano cum sit & a b, quia ζ b d, b c, in eodem sunt plano, in quo parallelæ a b, c d. Itaq; & g b rectæ b a ad angulos rectos α insistit. Quare cum a b sit recta ad rectas b g, b d: ε erit recta ad planum per b g, b d, id est, ad planum e f.

δ 8. I.

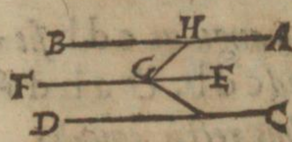
ε 4. XI.

ζ 6. XI.

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Quæ eidem *ef* rectæ lineæ *ab*, *cd* sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano hæ *ab*, *cd* quoque inter se sunt parallelæ.



A quolibet puncto g, rectæ e f, ducantur duæ perpendiculares g h, quod in plano parallelarum a b, e f; ac g i in plano parallelarum e f, c d. Quoniam ergò e g est recta ad g h & g i tangentes se in puncto g: α erit etiam recta plano per illas g h, g i ducto: cumq; f e una parallelarum sit illi plano per g h, g i, perpẽdicularis: β Erit & altera a b; & per eandem causam etiam c d, quia eidem e f est parallela. Cum itaq; a b, c d ei-

α 4. XI.

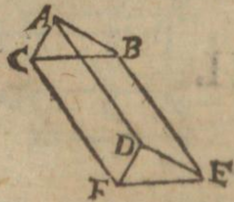
β 8. XI.

c d eidem plano sint ad angulos rectos, γ erunt etiam parallelæ. Debuit autem propositio hæc sumere duas parallelas extra planum, quia aliàs cùm 30 I coincidisset quæ de parallelis in eodem plano loquitur. γ 6. XI.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si duæ rectæ lineæ *a b, a c* se mutuò tangentes *in a*, ad duas rectas *de, df* se mutuò tangentes *in d*, sint parellelæ; non in eodem plano; illæ angulos *b a c, e d f*, æquales comprehendent.

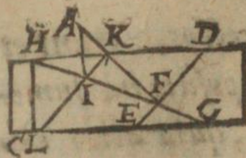


Ponantur a b, d e; *&* a c, d f *æquales: Ducanturq;* bc, ef; be, a d, cf. *Erunt ergò* be, a d *æquales parallelas* b a, e d *connectentes α æquales, ut &* a d, c f: *β adeoq; &* b c, c f, *quia eidem* a d *parallelæ. Ac α deniq;* b c, e f. *Atq; ita in Triangulis* b a c, e d f, *æqualium laterum*, a b, d e *&* a c, d f; *æqualiumq; basium* b c, e f; *anguli* b a c, *&* e d f *γ fiunt æquales.* α 33. I. β 9. XI. γ 8. I.

PROPOSITIO XI.

Problema 11.

A dato puncto *a* in sublimi; ad subjectum planum *b c*; perpendicularem rectam ducere.



In plano b c ducatur recta utcunq; d e, ad quam ex a α demittatur perpendicularis a f, β & in plano b c, per f,

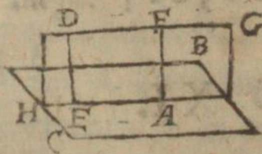
α 12. I,
β 1. I.
γ 31. I.
δ ex conſt.
ε 4. XI.
ζ 8. XI.
η 2. XI.
θ 3.def. XI.

ad d e ducatur perpendicularis g h, ad quam ex a α demittatur perpendicularis a i, quæ ad planum subjectum perpendicularis eſt: γ Ducta enim in plano b c, per i, ipſi d e parallela k l; cum d f ſit δ ad angulos rectos duabus f a, f h: & ε ſic ad planum per illas f a, f h: ζ erit etiam k i ad idem planum recta. Sed quia a i cum f a, f h, in η eodem eſt plano, tangitq; rectam k i in i: erit θ angulus k i a rectus; adeoq; a i ad angulos rectos ipſis k i, i f. ε Igitur & ad planum b c erit recta.

PROPOS: XII.

Problema 21.

Dato plano *b c* à puncto *a*, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.



α 11. XI.

Ex quovis puncto ſublimi d demittatur α ad planum b c perpendicularis d e, quæ, ſi ceciderit in a factum eſt quod quæritur: ſed ſi ceciderit in punctum aliud e, ex-

β 31. I.

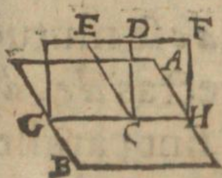
tenſa recta per e & a, ducatur per a ipſi d e β parallela

rallela a f, *in plano* g h *per* d e, e a, *ducto erit:* a f *recta ad planum datum erecta. Cum enim* d e, a f *sint parallelæ, & d e ad planum* b c, γ *recta;* δ *erit etiam* a f *recta ad idem planum* b c. γ ex conſt. δ 8. XI.

PROPOSITIO XIII.

Theorema 11.

Dato plano *a b* à puncto *c*, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabantur ad eaſdem partes.

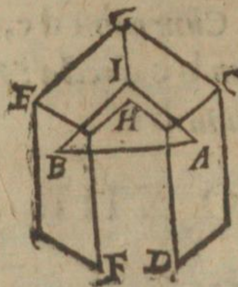


Ducantur, ſi poteſt fieri, c d c e *ad planum* a b *perpendiculares.* α *Erunt ergò ambæ parallelæ, quæ tamen in puncto* c *concurrunt, quod abſurdum. Eodem modo ex uno puncto ſublimi impoſſibile eſt, ad idem planum, duas perpendiculares demittere.* α 6. XI.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 12.

Ad quæ plana *c d, e f* eadem *a b* recta linea, recta eſt; illa ſunt parallela:



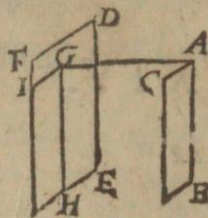
α 3. XI. Si non sunt, concurrant tandem producta illa plana ad partes c, e. α faciantq; sectionem g h lineam rectã, in qua sumto puncto utcũq; i, ducãtur i a, i b, in planis g c d & g e f. Itaq; cum a b, ponatur recta, ad utrunq; planum erunt trianguli

β 17. I. a i b, anguli i a b, & i b a recti, qui tamen sunt duobus rectis β minores.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si duæ rectæ lineæ *a b*, *a c* se mutuò tangentes *in a*, ad duas rectas *d e*, *d f* se mutuò tangentes *in d*, sint parallelæ; non in eodem consistentes plano: parallelæ sunt, quæ per illa ducuntur plana *b c*, *e f*.



α 11. XI. α Ducatur ex a in planum e f perpendicularis a g, & per punctum g β ducantur g h, g i

β 31. I. parallelæ ipsis d e, d f. Cum itaq; g h, a b, sint parallelæ ipsi d c; γ etiam inter se sunt parallelæ, anguliq;

γ 9. XI. b a g, a g h, duobus rectis δ æquales: ac propter

δ 29. I. hunc ε rectum, etiam ille rectus. Eodemq; modo c a g

ε 3. def. XI angulus est rectus. ζ Itaq; cum g a ad a b, & a c sit

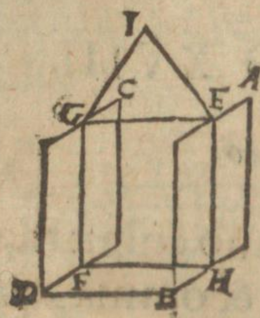
ζ 4. XI. recta,

recta; recta etiam erit g a, *ad planum* b c, *per illas ductum. Eadem autem* g a, *etiam* η *est recta ad planum* e f. θ *Itaq;* b c *&* e f *sunt plana parallela.* η ex constr. θ 14. XI.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 14.

Si duo plana parallela *ab*, *cd*, plano quopiam *ef* secentur: communes illorum sectiones *eh*, *ef*, sunt parallelæ.



Si non sunt parellelæ, convenient tandem productæ, ut in puncto I. α *Quoniam linea* h e i *tota est in plano uno* ab; *linea verò* f g i *tota in plano* α 1. XI. c d *producto: Producta itaq; illa plana concurrent quæ tamen ponuntur parallela.*

PROPOSITIO XVII.

Theorema 15.

Si duæ rectæ lineæ *ab*, *cd* parallelis planis *ef*, *gh*, *ik*, secentur; in easdem rationes secabuntur, videlicet, ut segmenta inter plana dicta sint proportionalia, ut *lm*, ad *mn*, ita *op*, ad *pq*.

Ducantur enim rectæ lo, nq *in planis* ef, ik; *& conjungãrũt recta* lq, *quæ occurrit plano* gh *in* r *puncto, à quo ad pũcta* mp *ducantur in eodem* gh *plano* rm, rp: α *eritq; triangulum* lnq, *in uno plano. Cumq; parallela plana* gh, ik *secentur plano trianguli* lnq β *erũt cõmunes sectiones* mr, nq *parallelo; ut &* rp *&* lo. *quamobrem erit, ut* lr *ad* rq; *ita* lm, *ad* mn. *Item, ut* lr *ad* rq; *ita* op *ad* pq: *ac proinde, ut* lm *ad* mn; *ita* op, *ad* pq.

α 1. XI.
β 16. XI.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema 16.

Si recta linea *ab* plano cuipiam *cd* ad rectos sit angulos, & omnia, quæ per ipsam *ab* plana, eidem *cd* ad angulos rectos erunt.

Sit enim per ab *ductum planum* ef, *secans planum* cd *per rectam lineam* fg: *atq; ex puncto* h *utcunq; sumto in linea* fg *ipsi* ab, *parallela* hi α *erigatur. Quoniam itaq;* ab, ih *sunt parallelæ, illa ad planũ* cd *recta existente,* β *erit & hæc recta. Et ad cõmu-*

α per 31. I.
β 8. XI.

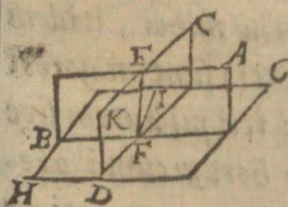
neni

nem sectionem f g γ perpendicularis: eodemq; modo rectæ omnes in plano g f ipsi a b parallelæ erunt ad communem sectionem f g γ perpendiculares, ipsumq; planum g f ad planum c d δ rectum. Nec aliter habet cum omnibus alijs planis per a b g ductis; sed & illa omnia ad planum c d recta sunt. γ 3. defi. XI. δ 4. defi. XI

PROPOS: IX.

Theorema 17.

Si duo plana *a b*, *c d* se mutuo secantia, plano cuidam *g h* ad rectos sunt angulos; communis etiam illorum sectio *e f* ad rectos eidem plano angulos erit.



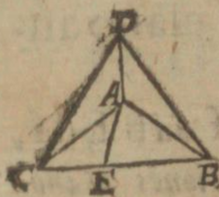
Aut enim e f *ad* b f, d f, *communes sectiones planorum* a b, c d *cum plano* g h *est recta, aut non. Si est ad illas recta,* α *etiam ad planum* g h, *per ipsas ductum: si ad alteram tantum* b f, *recta dicatur* e f; *quoniam* e f *in plano* a b, *ad planum* g h *recto perpendicularis est communi eorum sectioni* b f; β *erit & ad ipsum planum* g h *recta: Et ita, si ad alteram* d f *tantum poneretur recta, idem inferretur. Si autem* e f *ad neutram* b f, f d *credatur esse recta,* γ *ducatur ex* f *in plano* a b, *ad* b f *sectionem communem cum plano* g h *perpendicularis* f i: *& in plano* c d *perpendicularis* f k. *Quoniam ergò planum* a b α 4. XI. β 3. defi. XI. γ 11. I.

est rectum ad planum g h; *erit & i* f *ad* b f *sectionem communem perpendicularis, ut &* kf, *ad idem planum* g h: *adeoq; ex puncto* f *ad planum* g h
δ 13. XI. *duæ rectæ sunt perpendiculares, δ Quod absurdũ.*

PROPOS: XX.

Theorema 18.

Si solidus angulus *a* tribus angulis planis *b a c, c a d, d a b* contineatur: ex his duo quilibet, ut ut assumti, tertio sunt majores.



Si enim omnes tres sint inæquales inter se, patet duos esse tertio majores. Si autem duo tantùm æquales & tertius minor, itidem duo quilibet tertio sunt majores. Si unus, ut b a c, *sit maximus; reliqui autem sive æquales sive inæquales, quilibet horum cum illo reliquo est major. Quo maximo* b a c, *majores etiam sunt duo reliqui* b a d *&* d a c. *In plano enim per*
α 23. I. a b, a c, *ducto, α fiat angulus* b a e, *æqualis angulo* b a d, *& rectæ* a d *æqualis* a e, *& per* e *extendatur recta* b c *secans ipsas* a b, a c, *in* b *&* c; *& connectantur rectæ* b d, c d. *Quoniam in triangulis* b a d, *&* b a e, *latera* a d *&* a e *sunt æqualia &* a b *commune, illisq; comprehensi angu-*
β 4. I. *li æquales, β Ergò & bases* b e, b d *erunt æquales.*
γ 3. I. *Sed quia latera* d b, d c *sunt majora latere* b c; *γ demtis æqualibus* bd, be; *erit* dc, *major quã* ec.

Itaq;

Itaq; cum in triangulis dac *&* eac, *latera* da, ea *sint æqualia &* ac *commune; basis autem* dc *major basi* ec; *δ erit & angulus* dac *major quam* eac, *& æqualibus additis, erunt duo* bad *&* dac *simul majora angulis* bae, eac *simul; id est, angulo,* bac *maximo.* δ 25. I.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Omnis solidus angulus *a* sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.



Ductis rectis bc, cd, db, *erunt tres anguli* b, c, d *solidi, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, ut* b *sub* cba, abd *&* dbc: c, *sub* bca, acd, dcb: d *sub* cda, adb, bdc. *α Quoniam duo anguli* cba, abd, *marjores sunt angulo* dbc; *similiterq; duo* adb, adc *majores angulo* bdc; *& duo* acd, acb *majores angulo* dcb. *Sed tres hi* cbd, bdc, *&* dcb, *sunt duobus rectis æquales; β erunt illi sex duobus rectis majores. Sed cum iidem sex una cum tribus ad* a *angulis sint sex rectis ϛ æquales; ablatis illis sex, qui majores sunt duobus rectis: erunt tres reliqui ad* a, *constituentes angulum solidum, minores quatuor rectis. Nec diversa est demonstratio si angulus solidus constet ex pluribus, quam tribus planis angulis.*

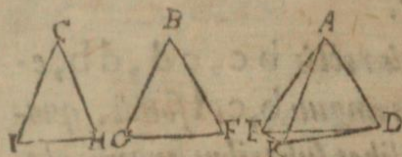
α 20. XI.

β 32. I.

PROPOS: XXII.

Theorema 20.

SI fuerint tres anguli plani *a,b,c* quorum duo, ut libet, assumti reliquo sint majores: comprehendant autem ipsos rectæ lineæ, *ad,ae,bf,bg,ca, ci*, fieri potest, ut ex lineis *de,fg,hi*, æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.



Si tres anguli dati, a, b,c, *sunt æquales* α *erunt quoq; bases* de, fg,hi, *æquales;* *& illarum qualibet duæ tertiâ majores si verò duo*

α 4. I. *anguli sint æquales & tertius minor,* α *erunt etiam duæ bases æquales. Et basis tertij utraq; minor; Et sic rursum quælibet duæ tertiâ sunt majores. Si autem unus* a *sit maximus; reliquis* b,c *vel æqua-*

β 24. I. *libus vel inæqualibus; erit &* de *basis omnium maxima & sic* de, fg, *majores tertia* hi, de *item &* hi *majores quàm* fg. *Erunt etiam* fg,

γ 23. I. hi *majores quam* de. γ *Fiat enim* dak *angulus æqualis angulo* b *&* ak *sit æqualis ipsi* ad, *quia ex* a *per puncta* dke *transit peripheria circuli ob trium illarum rectarum* ad,ak,ae *æqualitatem, connectanturq;* dk, ke. *Quoniã ergò duo anguli* b,c *ponuntur majores angulo* dac *&* b *æqualis*

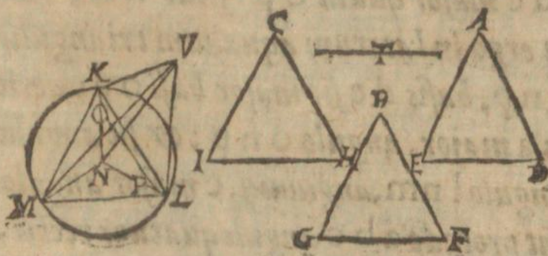
est

est angulo d a k; *erit angulus* c *major reliquo* k a c. *basisq́;* d k *æqualis basi* f g: *basis verò* k e *minor quam* h i. *Cum ergò* d k, k e *sint* ᵈ *majores quam* d e, *eádem* d e *majores etiam erunt* f g, *&* h i, *tribus ergò hisce ita comparatis, ut duæ quælibet tertia sint majores, facilè erit inde triangulum* ᵉ *efformare.* ᵈ 20. I. ᵉ 22. I.

PROPOS: XXIII.

Problema 3.

Ex tribus angulis planis *a b c*, quorum duo quomodocunq; assumpti, reliquo sunt majores, solidum angulum constituere.



Tres illos angulos a b c *comprehendentes lineæ omnes ponantur æquales; & subtendantur bases* d e, f g, h i, *ex quibus potest triangulum* ᵃ *constitui, quod sit* k l m, *ut latus* k l, *basi* d e, l m *basi* f g, *&* k m, *basi* h i *sit æquale; ac circa il-* ᵃ 22. XI.

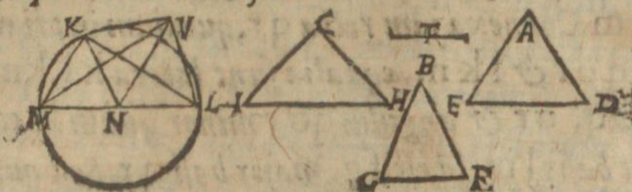
lud β *describatur circulus, ex cujus centro* n, *ducantur* n k, n c, n m, *quibus majores sunt qualibet rectarum, ut* a d, a e, *angulos planos includentium.* *Primò* γ *cadat centrum* n *intra illud triangulum* k l m, *quia Oxygonium Si ergò* a d, a e, *non sunt majores, quam* n k, n l: *sint vel aequales:* δ *eruntq; propter bases etiam aequales* d e & l k *anguli* k n l & a; *ut* & l n m & b; & m n k & c *aequales.* *Cumq; tres illi circa centrum* n *sint quatuor rectis* ε *aequales: erunt* & a b c *quatuor rectis aequales, contra hypothesin: vel minores* a d & a e, *quam* n k & n l, & *tum* n o, n p, *aequalibus abscissis; ducta* o p *parallela erit ipsi* k l, *propter* ζ *proportionalem sectionem trianguli* l n k & *triangula* l n k, p n o, *aequiangula.* η *Cumq; sit, ut* n k, *ad* k l: *ita* n o *ad* o p: θ *erit* l k; *id est*, d e *major quàm* o p: *sicut* n k, *quàm* n o. *Cum ergò in laterum aequalium triangulis*, d a e & o n p, *basis* d e *sic major basi* o p; κ *erit & angulus* a *major, angulo* o n p; & *sic angulus* b *major angulo* l n m, *angulusq;* c *major angulo* m n k. *Erunt proinde* a b c *anguli quatuor rectis, quibus illi tres circa* n *sunt aequales, majores, contra hypothesin;. Itaq;* a d, a e *nec aequales, nec minores, sunt ipsis* n l, n k.

β 5. IV.
γ cor. 5. IV.
δ 8. I.
ε corol. 15. I
ζ 2. VI.
θ 14. V.
η 4. VI.
κ 25. I.

Deinde cadat centrum n *in latus* l m, *quod fit, si angulus* k *sit rectus, sintq;* a d, a e, *id est*, b f, b g; *vel aequales ipsis* n l, n k, *id est, lineae* l m, *quae ae-*

qualis

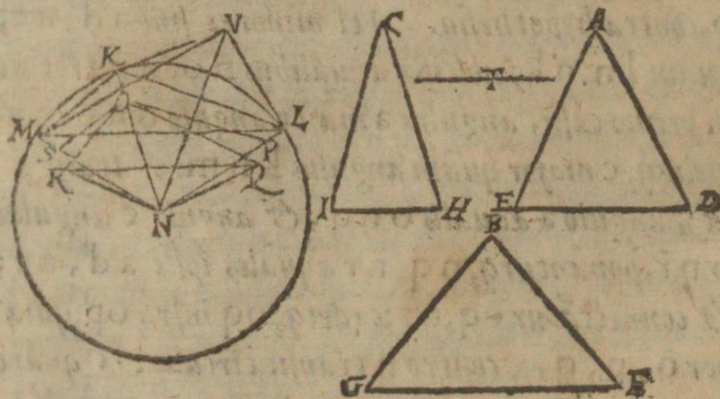
qualis est ipsi f g. Erunt ergò b f, b g æquales ipsi f g, quod λ absurdum; vel sint minores, eruntq; b f, b g minores ipsis n l, n k, id est, ipsa l m, vel f g, quod iterum absurdum. λ 20. I.



Postremò cadat centrum n extra triangulum k l m, quod fit, si angulus k sit obtusus: sintq; a d, a e, vel æquales ipsis n l, n k; erunt propter bases d e, k l, æquales, etiam anguli a & k n l æquales δ, & angulus c angulo k n m; totusq; l n m, angulis a & c, qui duo simul ex hypothesi, tertio b sunt majores. Rursus, idem angulus l n m propter bases l m & f g æquales, æqualis est angulo b, contra hypothesin. Vel minores sint a d, a e, quàm l n, n k; abscissis æqualibus n o, n p, erit, ut in primo casu, angulus a major angulo o n p, angulusq; c major quàm angulus k n m. Itaq; fiat μ angulo a æqualis o n q, & angulo c angulus o n r, ponanturq; n q, n r æquales ipsis a d, a e; & connectatur o q, o r; cadetq; o q infra o p, quia per o, p, q ex centro n transit circulus, ν quare, cum angulus, p o n, æqualis sit angulo n k l, externus interno, erit angulus q o n, minor angulo n k l. Eodemq; modo n o r minor, quàm n k m. Si ducatur o s parallela ipsi k m, Totus ergò l k m, toto, q o r major erit. μ 23. I. ν 29. I.

Sunt

Sunt autem in triangulis o n q *&* d a c *æqualium laterum, & anguli æquales* a *&* o n q *etiã bases* d e *&* o q ꝫ *æquales, ideſt,* o q *&* l k, *& ſic* o r *&* k m. *Connexa jam recta* q r, *quoniam in triangulis* q o r *&* l k m, *æqualia ſunt latera* k l, km;
4. I. *ipſis* o q, o r *& angulus* q o r *minor quàm* lkm:
24. I. *Erit baſis* l m, *id eſt,* f g, *major baſi* q r. *Sed quia* b f, b g, *ſunt æqualia ipſis* n q, n r; *baſis autem* f g, *major baſi* q r: *Erit angulus* b *major angulo* q n r. *Rurſus, quia anguli* o n q *&* a; *item* o n r *&* c *facti ſunt æquales: erit totus* q n r *æqualis duobus*, a *&* c. *Sed* a *&* c *ponuntur majores angulo* b: *Igitur &* q n r *eodem* b, *major eſt, qui tamen modo ipſo* q n r *major eſt demonſtratus. Itaq; majores eſſe oportet* a d, a c *ipſis* n k, n l.



Iam cum rectæ a d, a c *majores ſint rectis* n k e l n *ubicunq; centrum* ꝫ *trianguli exiſtat, poſſit recta* a d *plus quam recta* nk, *quadrato lineæ* t *per*

lemma propositionis 15. X. *ita ut quadratum rectæ* a d *æquale sit quadratis rectarum* n k. *Et ex centro* n ϖ *excitetur* n u, *ad planum circuli* k l m *æqualis ipsi* t, *connectanturq;* u k, ul, um. *Quoniã ergò* n u *est recta ad planum* klm, *recta etiam* ϵ *erit ad rectas* n k, n l, n m; *ac proinde quadratum rectæ* u k σ *æquale quadratis rectarum* k n, u n. *Cumq; & quadratum* a d *æquale sit, ex constructione, ijsdem quadratis* k n, n u, *erunt ergò* u k & a d *quadrata æqualia, ipsæq; rectæ* u k, a d *æquales. Rursus, quia latera* u n, n k, *trianguli* u n k *æqualia sunt lateribus* u n, l n, *trianguli* u n l, & *anguli ipsius contenti* u n k, u n l *recti: Erunt bases* u k, u l ζ *æquales ut &* u m. *Sunt ergò tres,* u k, u l, u m *æquales* a d; *ipsis etiam* a e, b f, b g, c h, c i, *æquales: adeoq; in triangulis* u k l, l u m, k u m, *æqualium laterum & basium, cum triangulis* dae, f b g, h c i: *erunt & angulis,* a, b, c *anguli ad* u δ *æquales; ipseq; angulus solidus* u, *tribus illis angulis continetur, quod erat propositum.*

ϖ 12. X I.

ϵ 3. X I.

σ 47. I.

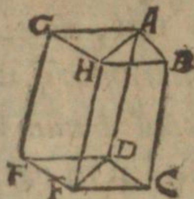
PROPOS: XXIV.

Theorema 21.

Si solidum *ab, ef,* parallelis planis *ac, cf, fh, ha, af, be* contineatur; adversa illius plana parallelogramma, sunt

sunt similia & æqualia.

α 16. XI.



Cum enim parallela plana af, b e *secentur plano* ac: α *erunt comunes sectiones* a b c d *parallelæ. Similiter cum plana* af, be *secentur plano* a c; *erunt cōmunes ipsorum sectiones* ad bc *parallelæ; & sic figura quadrilatera* a b c d *est parallelogramma, adeoq; & reliquæ omnes. Sed & opposita parallelogramma sunt similia & æqualia.*

β 11. XI. *Cum enim rectæ* a b, b h, *parallelæ sint rectis* d c, c e *in opposito plano;* β *erunt* a b h, b c e *anguli æquales, & sic etiam reliqui anguli parallelogrammi* b g *reliquis parallelogrammi* c f. *Cumq;* ab *ipsi* dc *in parallelogrāmo* a c: & b h *ipsi* c e *in parallelogrammo* b e *æqualis* γ *sit: erit, ut* a b *ad* b h; *ita* d c *ad* c e: *ac propterea, ut* b h *ad* h g, *ita* c e *ad* e f. *Ob eandem causam erunt latera*

γ 34. I. *parallelogrammorum* b g, c f *circa æquales angulos proportionalia & parallelogramma ipsa similia. Ductis jam diametris* a h, d e; *cum in*

δ 4. I. *triangulis* a b h, & d c e γ *æqualia sint latera* a b b h *lateribus* d c, c e, & *angulus* a b h *angulo* d c e: *erunt tota triangula* δ *æqualia, ipsorumq; dupla parallelogramma* b g, c f *æqualia. Idem*

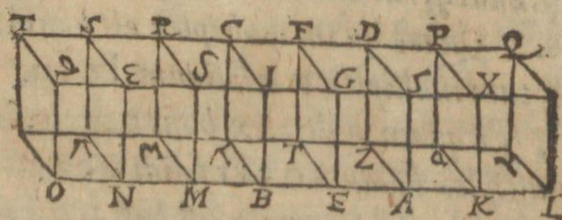
de

de oppositis reliquis parallelogrammis demonstrabitur, quod & similia & æqualia inter se sint.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 22.

Si solidum parallelepipedum *a b c d*, plano *e f* secetur adversis *a d* *b c* planis parallelo; erit, quemadmodum basis *a g* ad basin *bg*, ita solidum *a e f d*, ad solidum *b c f e*.



Intelligatur parallelepipedum a b c d *utrinque productum, sumanturque in* a b, *utrinque protracta, quotcunque rectæ* a k, k l *ipsi* a e: *& quotcunque rectæ* b m, m n, n o *ipsi* e b *æquales; ducanturque per puncta* k, l, m, n, o *plana* k p, l q, m r, n s, o t, *parallela planis* a d, e f, b c. *Quoniam igitur solidū* a e f d *continetur planis parallelis, ex hypothesi; ipsum erit parallelepipedū, ex definitione;* a *habebitque plana opposita parallelogramma similia, ut & reliqua omnia* a k p d, k l q p, e b c f, b m r c, m n s r, n o t s, e l q f, e o t f. a 24. XI.

Sed

Sed cum parallelogramma ag, ku, lx super æqualibus basibus ae, ak, kl sint β æqualia similaq; propter angulos γ æquales, & latera circum illos æqualia & proportionalia erunt. Sic æqualia & similia sunt parallelogramma ay, kz, la. Itaq; cum & æqualia & similia sint parallelogramma ad, kp, lq; erunt tria plana ag, ay, ad solidi aefd, æqualia & similia tribus planis ku, kz, kp, solidi akpd: hisce vel tribus in unoquoque solido planis opposita sunt æqualia & similia, nẽpe ag ipsi zf; ay, ipsi uf; & ad ipsi ef. Itaq; δ æqualia sunt solida aefd, akpd, klqp. Eadẽq; ratione & ebcf, bmrc, mnsr, nots. Quare quam multiplex est basis lg, basis ag, tam multiplex erit solidum lefq, solidi aefd, & quam multiplex basis og, basis bg, tam multiplex solidum oeft solidi befc. Quoniam verò si basis lg, æqualis est basi og; æquale etiam est solidum lefq solido oefd; quia basibus lg, og existentibus æqualibus, æqualia quoq; sunt & similia sex parallelogramma solidi oeft: Si autem basis est major base, solidum quoq; solido majus est, & si minor, minus; in quacunq; hoc fiat multiplicatione. Erit ergò, ut basis ag prima magnitudo, ad basin bg, secundam magnitudinem; Ita solidum aofd, tertia magnitudo; ad solidum befe, quartam. Eadem ratione demonstratur esse solidum ad solidum, ut basis dy ab basin cy; &

β 36. I.

γ 29. I.

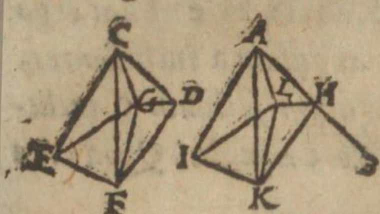
δ 10. defin. 1X.

cy; & ut basis ay, ad basin by; & ut basis bg ad basin cg.

PROPOSITIO XXVI.

Problema 4.

Ad datam rectam *ab*, ejusq; punctum *a*, angulum solidum constituere, angulo solido dato *c* æqualem.



Ex f *ad planũ per* c d c e *ductũ, perpendicularis* α f g *erigatur*; α 11. XI. *connectanturq;* df, dg, ef, eg, cg; *& abscissa,* a h *æquali* c d, β *fiat angulus* h a i, *angulo* β 23. I. d c e, *æqualis, & recta* a i, *rectæ* c e *æqualis. Iterumq; in plano per* a h, a i *ductum, constituatur angulus* h a l, *æqualis angulo* d c g *&* a l *ipsi* c g: *Sed ex* l *ad planum, in quo sunt* a h, a l, a i; γ *erigatur perpẽdicularis* l k, *quæ ipsi* f g *ponatur æqualis; & conjungatur recta* ka. *Erit angulus solidus* a, *contentus tribus planis* hak, hai, *&* k a i *æqualis solido dato* c. *Connexis enim rectis* hk, hl, ik, il, *cum latera* a h, a l, *trianguli* a h l, *æqualia sint lateribus* c d, c g *trianguli* c d g; *anguliq;* h a l γ 12. XI. *&* c d g *æquales ex constructione*: δ *erunt bases* δ 4. I. hl, d g *æquales. Rursus ablatis æqualibus angulis* h a l *&* d c g, *ex æqualibus* h a i, d c e; *relictis*

æqualibus l a i, *&* g c e *qui comprehenduntur æqualibus lateribus* a b, a i *ipsis* c g, c e: *Erunt &* l i *&* g e *δ æquales. Et sic in triangulis rectangulis* h l k, d g f, *δ æquales bases,* h k, *&* d f; *iterumq; in triangulis rectāgulis* a h k, *&* c d f *δ æquales bases* a k, c f *Erunt ergò &* h a k *&* d c f *anguli æquales. Deniq; etiam in rectangulis* k l i *&* f g e *bases* k i *&* f e *δ æquales. Iterumq; in triangulis* k a i, *&* f c e, *æqualium laterum & basium, ε æquales erunt anguli,* k a i, *&* f c e. *Sunt ergò tres anguli plani solidum angulum* a *includentes, æquales tribus planis angulum solidum* c *includentibus: Et solidus* a *solido* c *æqualis. Quod erat faciendum.*

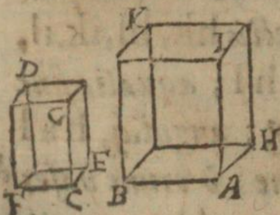
δ 4 I.
ε 8. I.

PROPOSITIO XXVII.

Problema 5.

A data recta linea *a b*, dato solido *c d* parallelepipedo, simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

α 26. XI.



Ad rectæ a b *punctum* a, *fiat α angulus solidus æqualis angulo solido* c, *ut tres anguli plani* h a i, i a b, b a h *æquales sint tribus angulis planis* e c g, g c f, f c e. *Deinde fiat β ut* c f *ad* c g, *sic* a b *ad* a i; *&* ut c g *ad* c e, *ita* a i *ad* a h: *erit*

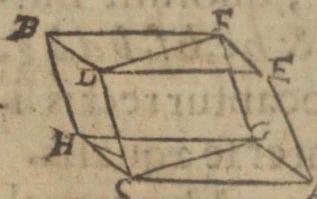
β 12. VI.

erit ex æquo, ut c f *ad* c e, *ita* a b *ad* a h: *Postea parallelogrammis completis absolvatur parallelepipedũ* ak, *quod parallelepipedo* cd *simile similiterq; positum erit. Cùm enim æquales sint anguli* γ 24. XI.
b ah, *&* f c e, *lateraq;* b a, a h, *proportionalia* δ 9. def. XI
lateribus fc, c f *erũt parallelogrãma* hb, ef *Similia similiterq; posita: itemq;* h i, e g; *&* i b, g f: *quibus tribus similibus similiterq; positis inter se, erunt & opposita eorum plana similia similiterq; posita: & δ sic solida* a k, c d, *similia similiterq; posita.*

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema 23.

Si solidum parallelepipedum *a b* plano *c f* secetur per diagonios *cg*, *df*, adversorum planorum *a h*, *e b*: bifariã secabitur solidum *a b* ab ipso plano *b c*.



Quoniam utraq; c d, g f α 34. I.
parallela & α æqualis est ipsi a e; *erunt etiam inter β se parallelæ & æqua-* β 9. XI.
les, γ ipsasq; connectentes γ 33. I.
cg, df, *parallelæ, per quas ductum planum* c f, *bisariam secat ipsum parallelepipedum* a b.

Cum enim plana a h, e b *sint parallelogramma*
b 24. XI. *æqualia b & similia: erunt & eorum dimidia seu triangula* a g c, g c h; e f d, f d b, *æqualia, & propter latera circum æquales angulos proportionalia etiam, similia. Cum item & parallelo-*
c 6. VI. *grammum* a f, *b æquale sit, & simile parallelogrammo* c b: *&* a d *ipsi* g b, *&* c f *commune; erunt duo triangula* a g c, e f d; *& parallelogramma* a f, a d, c f, *prismatis* a c g f e d, *æqualia & similia duobus triangulis*, h c g, b d f, *& parallelogrammis* c b; b g, c f *prismatis* h g d c b f:
c 10. def. XI. *Ipsaq; prismata inter se c æqualia. Quæ cum componant parallelepipedum* a b; *Erit ipsum bifariam sectum plano* c f.

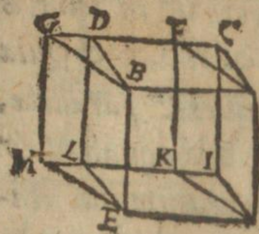
PROPOSITIO XXIX.

Theorema 24.

Solida parallelepipeda *a c d e, a f g e* super eandem basin *a b* constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes *a i, ak, e l, e m*, & *h c, b f, b d, b g*, lineæ in ijsdem collocantur rectis lineis *im* & *c g*; sunt inter se æqualia.

a 35. I. *Quia enim a æqualia sunt parallelogramma* a l, a m, *erunt communi trapezio* a k l e *ablato, æqualia triangula* a i k, e l m. *Quia item æqualia*

sunt



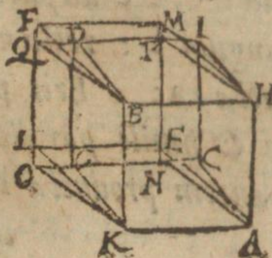
β sunt omnia latera triangulorum a i k *&* h c f*; item* e l m *&* b d g*: erunt γ æquiangula, & propter latera circum æquales angulos δ proportionalia, inter se similia.* β 34. I. γ 8. I. δ 4. VI. ε 24. XI. ζ 36. I. η 10. defi. XI

ε Rursus & parallelogramma a c e d *inter se sunt æqualia & similia, ζ sicut & i f, & l g propter æquales bases* i k, l m: *adeoq; omnia plana Prismatis* a i k, f c h, *æqualia sunt omnibus planis Prismatis* e l m, g d b; *ipsaq; prismata æqualia. Quibus si addatur commune solidum* ahfk, ldb e*; parallelepipeda super eadem basi in eadem altitudine fiunt æqualia.*

PROPOSITIO XXX.

Theorema 25.

Solida parallelepipeda *aidk, amfk* super eandem basin *ab* constituta & in eadem altitudine, quorum insistentes *ac, ae, kg, kl: hi, hm, bd, bf,* lineæ non in ijsdem collocantur rectis lineis *cg, id:* inter se sunt æqualia.



Quia enim plana c d, e f, *opposita basi* a b, *sunt in eodem plano ob eandem parallelepipedorum altitudinem: pertractis in eodem*

plano rectis c g, i d; *illam quidem* e m *&* l f *protractæ secent in* n *&* o: *hanc verò* i d *in punctis* p, q: *jungantur, rectæ* a n, k o, h p, b q. *Quia*
α 34. I. *igitur* p q, m f *rectæ sunt æquales & parallelæ, sicut &* m f, h b: *erunt &* p q, h b *æquales &*
β 33. I. *parallelæ & h p q b est parallelogrammum. Sicut eadem de caussa &* h p n a, a n o k, k o q b, *Est autem &* n o q p *parallelogrammum. Igitur* a p q k *est parallelepipedum. Cui æquale* γ *est pa-*
γ 29. XI. *rallelepipedum* a i d k, *propter eandē basin* a b *& lineas insistentes in ijsdem rectis* c o, i q. *Sed & eidem* a p q k *propter eandem basin* a b, *& lineas insistentes in ijsdem rectis* n m o f, *æquale est parallelepipedum* a m f k. *Igitur* a i d k *&* a m f k *etiam inter se sunt æqualia.*

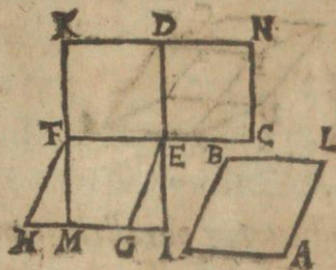
PROPOSITIO XXXI.

Theorema 26.

Solida paralellepipeda super æquales bases *a b*, *c d*, constituta, & in eadem altitudine; æqualia inter se sunt.

Protractis duobus lateribus d e, c e *ad partes e fiat angulus* f e g *æqualis angulo* l: *recta* e f, *rectæ* l b; *& recta* e g *rectæ* l a: *Erit parallelogrammum* e h *æquale & simile parallelogrammo* a b. *Conveniat autem producta* h g

cum



cum d e in i, *& compleatur parallelogrammum* i k. *Iam concipiantur super bases* e h, i f, e k *æquè alta parallelepipeda ipsis super* a b, c d *cōstructis parallelepipedis, ut omnium insistentes lineæ ad bases sint perpendiculares. Erunt super* a b *&* e h *propter æqualia & similia plana inter se α æqualia; itemq; super* e h *&* i f *β æqualia. Cūq; parallelogrāma* e h, c d *&* f i *sint γ æqualia, eidemq;* e h *æquale* c d; *erunt* e f c d *&* i f *æqualia. δ Erit igitur, ut* i f *ad* e k *ita* c d *ad* e k. *ε Sed, ut* i f *ad* e k, *ita est solidū super* i f, *ad solidū super* e k: *quia planum super* e f *secans totum solidum super* i k, *est parallelum planis adversis super* d k, i m, *erectis. Eademq; ratione ut* e d *ad* e k, *ita solidum super* c d *ad solidum super* e k. *Itaq; erit, ut solidū super* i f, *ad solidum super* e k, *ad solidum super* c d, *ad solidum super* e k: *Eruntq; solida super* i f *&* c d *ζ æqualia. Sed parallelepipedum super* i f *est æquale parallelepipedo super* a b. *Aequalia igitur erunt & parallelepipeda super* a b, c d.

α 10. def. XI.
β 29. XI.
γ 35. I.
δ 7. V.
ε 25. XI.
ζ 9. V.

PROPOS: XXXII.

Theorema 27.

Solida parallelepipeda *abcd, efgh*, sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases, *ab, ef*.



α 45. I.
β 31. XI.
γ 7. XI.
δ 25. XI.

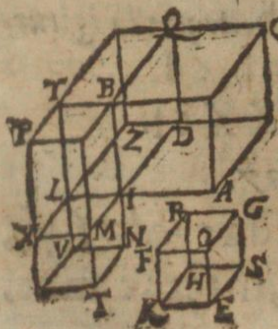
Super rectam e k α *constituatur parallelogrammum* i k *æquale parallelogrammo* a b *in angulo* i e k, *æquali ipsi* e n f: *ita, ut* i f *fiat unum parallelogrammum. Completo autem parallelepipedo* i f l h; *erunt* a b c d *&* i k l m, *æqualia* β *parallelepipeda.* γ *Erit igitur ut solidum* i k, l m, *ad solidum* e f g h. δ *Sed solidum* i k l m, *ad solidū* e f, g h *est, ut basis* i k *vel ipsi æqualis* a b, *ad basin* e f. *Igitur etiam solidum* a b c d, *ad solidum* e f g h, *est ut basis* a b, *ad basin* e f.

PROPOS: XXXIII.

Theorema 28.

Similia solida parallelepipeda *ab cd, efgh* inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum *ai ek.*

Producatur a i, *ad* l, *ut* i l *sit æqualis ipsi* e r *vel* g r. *Item* d i *ad* m, *ut* i m *sit æqualis ipsi* h k *vel* g o: *Item* b i *ad* n, *ut* i n *sit æqualis ipsi* k f, *vel* g s. *Et completis parallelogrammis* l m, l n, i t, *perficia-*



perficiatur parallelepipedum t x i u. *Erunt parallelogramma propter angulos & latera æqualia* i x *&* g f, l n *&* r s, i t *&* g e *similia & æqualia, quib. cũ sua opposita in illis parallelepipedis* e f g h, *&* t x i u *sint* α *similia & æqualia; erunt* β *ipsa illa parallelepipeda inter se æqualia & similia.* Rursus *completis parallelogrammis* m b, b l, l m, *perficiatur parallelepipedum* m p, b l. *Item completis parallelogrammis* i y, d l, i q *perficiatur parallelepipedum* i y q z. *Quoniam ergo ex similitudine parallelepipedorũ* a b c d, e f g h, *est; ut* a i *ad* e k, *id est,* i l; *ita* d i *ad* h k *vel* i m: *&* b i *ad* f k *vel* i n. γ *Sed ut* a i *ad* i l, *ita est parallelogrammum* a d *ad* d l; *& ut* d i *ad* i m, *ita parallelogrammum* d l *ad* l m; *& ut* b i *ad* i n, *ita parellogrammum* b l *ad* l n. *Erit ergò ut* a d *ad* d l, *ita* d l *ad* l m, *&* b l *ad* l m. δ *Sed ut basis* a d *ad basin* d l, *ita est parallelepipedum* a d c b, *ad parallelopipedum* d l y q. *Atque ut basis* d l, *ad basin* l m, *ita parallelepipedum* d l y q *ad parallelopipedum* l m b p: *& ut bases* b l, l n; *Ita parallelepipeda* l m b p *&* n l t x. *Quare erit, ut parallelepipedum* a d c b *ad parallelepipedum* d l y q; *ita parallelepipedum* d l y q *ad* b l b p, *& hoc ad* l n t x. *Quare quatuor sunt continuè proportionales quantitates* a d c b, d l y q, l m p b, l n t x: *& proportio primæ* a d e b *ad quartã* l n t x, *i.e.* a d *ad* e f g h, *est triplicata, proportionis primæ* a d c b, *ad secundam* d l y q. δ *Vt autẽ* a d c b

α 24. XI.
β 10. def. XI
γ 1. VI.
δ 32. XI.
ε 10. def. XI

ad d l y q. *ita est basis* a d *ad basin* d l; γ *& ut* a d *ad* d l; *ita est* a i *ad* i l, *id est* e k. *Est ergo proportio parallelepipedorum* a d c b *&* e f g h, *triplicata proportionis homologorũ laterum* a i *&* e k.

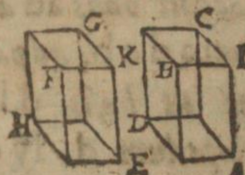
Corollarium.

Datis quatuor lineis continuè proportionalibus, ut est prima ad quartam: ita sunt parallelepipeda primæ ad quartæ similia similiterq; descripta.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 29.

Æqualium solidorũ *ad cb, ehgf*, parallelepipedorũ bases *ab, eh*, & altitudines reciprocantur, & quorũ solidorũ parallelepipedorũ bases & altitudines reciprocantur, illa sunt æqualia.



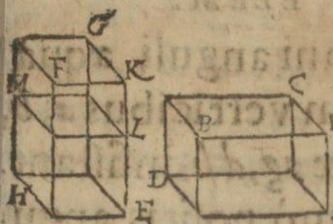
Ad bases a b, e h, *sint insistentes* ai, e k *perpẽdiculares, quæ sunt parallelepipedorum datorũ α altitudines: quæ si fuerint æquales, erunt & propter ipsa parallelepipeda æqualia ipsæ bases* a b, e h *æquales* β. *Adeoq;, ut basis* a d *ad basin* e h; *ita* e k *ad* a i, *id est, bases & altitudines sunt reciprocæ.*

α per 4. defin. VI.

β 31. XI.
γ 7. V.

Si autem altitudines sint inæquales ex e k *majore abscindatur ipsi* a i *æqualis* e l, *& per* l *ipsi basi* e h *ducatur planum parallelũm* l m. *Quoniam ergò æqualia sunt solida* a c d b *&* e h g f, γ *erit ut* acdb, *ad* ehlm; *ita* ehgf *ad* fhlm. δ *Ut*

autem



autem solidum a d c b *ad solidum* ehlm; *ita* c *basis* a d *basin* e h, *propter altitudines* ai, el *aquales*. δ 32. XI.
δ *Atq; ut* ehgf *ad* ghlm, *ita basis* k n *ad basin* ln.
Igitur, ut basis ad c *d basin* eh; *ita est* k n *ad* lm: *Et sic* ek *ad* el, *id est, ad* ai *ipsi aqualem Quare est, ut basis* a d, *ad basin* e h; *ita altitudo* ek *ad altitudinem* ei, *id est, reciproca sunt bases altitudinib, Sint jam bases & altitudines reciprocæ erunt etiã parallelepipeda æqualia. Si enim altitudines* ek, & ai *sint æquales, cum sit, ut altitudo ad altitudinẽ, ita basis ad basin: erunt etiam bases* ad, e h, *æquales & sic parallelepipeda ipsa æque alta æqualia Quod si inæquales sint altitudines, abscindatur, ut antea, æqualis. Quoniã ergo est ex hypothesi, ut basis* ad *ad basin* e h; *sic altitudo* ek *ad altitudinem* ai, *id est*, e l. *Vt autẽ est basis* a d *ad basin* eh, *ita est solidum* adcb, *ad solidum* ehlm. *propter altitudines* el, ai *æquales*: *Et* ε *ut* e k *ad* el, *ita* k n, ε 1 VI.
ad ln. δ *Vt autẽ* kn *ad* ln *ita est solidum* ehgf, *ad* ζ 9. V.
solidũ ehln. *Ideoq; erit, ut solidũ* adcb, *ad solidũ* ehlm; *ita* ehgf, *ad* ghlm. *Et sic* adcb & ehgf *sunt æqualia. Poterat idẽ ostendi si insistẽtes, vel altitudines parallelepipedorũ nõ sint perpẽdiculares, si deinde demittãtur perpẽdiculares Eadem hæc etiã de Prismatib. ijsdẽ servatis principijs vera sunt.*

PROPOSITIO XXXV

Theorema 30.

Si fuerint duo plani anguli æquales *b a c, d e f*, quorum verticibus *a, b*, sublimes rectæ lineæ *ag, dh*, insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales *b a g* & *c a g* utrumq; utriq;: In sublimibus autem lineis *a d, g h* quælibet sumta fuerint puncta *g, h*, & ab his ad plana, in quibus cõsistunt anguli *bac, def* primum positi, ductæ fuerint perpendiculares, *g i, h k*; à punctis verò *i, k* quæ in planis à perpendicularibus *g i, h k* fiunt ad angulos *b a c; d e f* primùm positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ *i a, k d* hæ *i k, k d* cum sublimibus *a g, d h* æquales angulos comprehendent.





Si enim a g, d h. *sunt inæquales, auferatur ex* a g *ipsi* d h *æqulis* a l, *&* ex l *ad planum* b a c *demittatur perpendicularis* l m. *Quoniam igitur*

6. XI. g i, l m, *sunt ad idem planum perpendiculares, erunt parallelæ, & in eodem plano trianguli* g a i. *cadetq;* l m *in rectam* a i. *Iam ducantur ex punctis* m, k *ad rectas* a b, a c, d e, d f *perpendiculares.*

lares m b, m c, k c, k f *& connectantur rectæ* b c, b l, l c, e f, e h, h f. *Et quia* l m *est recta ad planum anguli* b a c *ipsa rectum angulum efficiet β cum recta* a m *in eodem plano ducta. Quare* β 3. def. XI.
quadratum a l *erit γ æquale quadratis* a m, l m: γ 74. I.
Sed quadratum a m *est γ æquale quadratis*, a c, δ 48. I.
c m. *Igitur quadratum* a l *æquale est quadratis* ε 47. I.
a c, c m, m l. *At quadratis* c m, m l *æquale* ζ 4. I.
est quadratum c l. *Quia*, c m l *angulus est β rectus*. η 8. I.
Igitur quadratum a l *æquale est quadratis* a c, c l. *Ideoq;* a c l *angulus erit δ rectus. Rursus, quia quadratum* a c *æquale est quadratis* a m, m l: *Sed* a m *γ æquale est quadratis* a b, b m. *Igitur quadratum rectæ* a l, *æquale est quadratis rectarum* a b, b m, m l: *at quadratis* b m, m l *æquale est quadratum* b l. *Ergò quadratum* a l *æquale est quadratis* a b, b l *angulusq;* a b l *erit δ, rectus. Nec aliter anguli* d f h, *&* d e h, *ostendentur recti. Quoniam itaq;* a b l *&* l a b *anguli trianguli* a b l *sunt æquales angulis* d e h, h d e, *trianguli* d e h; *Sunq; latera* a c, d h *æqualia; ε erunt & reliqua latera* a b, b l, *reliquis lateribus* d e, h e *æqualia. Eodemq; modo æquales erunt rectæ* a c, c l, *rectis* d f, f h. *Quare in triangulis* a b c, d e f *æqualium laterum* a b, a c, *ipsis* d e, d f, *& angulorum* b a c *ipsi* e d f; ζ *Erunt & bases* b c, e f *inter se, & anguli* a b c, a c b, *angulis* d e f, d f e, *æquales. Sunt autem & toti anguli* a b m,

a c m

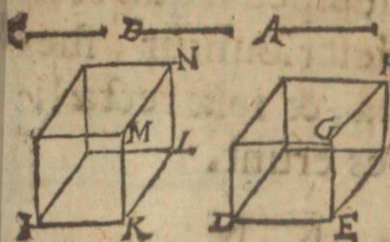
a c m *æquales totis* d e k, d f k, *cum sint recti. Itaq;* & *reliqui* m b c & m c b, *reliquis* k e f, k f e, *erunt æquales; propterea q; cum* & *latera* b c, e f *sint ostensa æqualia. Erunt latera* b m, c m *laterib.* e k, f k *æqualia. Quia ergò latera* a c, c m *æqualia sunt lateribus* d f, f k *anguliq;* a c m, d f k *recti, erunt* & *bases* a m, d k *æquales. Cum autem æquales sint ostensæ rectæ* b l, c h; *erunt* & *earum quadrata æqualia. Sed quia quadratũ* b l, *æquale est quadratis* b m, m l; & *quadratum* e h, *quadratis* e k, k h: *Erunt* & *quadrata* b m, m l *æqualia quadratis* e k, k h. *Ablatis ergò quadratis* b m, e k *æqualibus, reliqua quadrata* l m h k *erunt æqualia, rectæq;* l m, h k *æquales. Quamobrem cum latera* a l, a m *æqualia sint lateribus* d h, d k; & *basis* l m, *basi* h k: *erunt* & *anguli* l a m, h d k *æquales. Quod erat propositum.*

PROPOS: XXXVI.

Theorema. 13.

Si tres rectæ lineæ *a, b, c* proportionales fuerint, quod ex tribus his fit solidum *c h* parallelepipedum, æquale est descripto à media linea *b* solido parallelepipedo, *i m*, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum verò prædicto.

Cum



Cum enim sit, ut d e *ad* i k, *ita* k m *ad* e g (*quia* d e *ipsi* a, & i k, k m, *ipsi* b; & e g *ipsi* c *sumtæ sunt æquales*) & *anguli* d e g i k m *æquales*: *α* *Erunt* *parallelogramma* d g, i m, *æqualia quia latera habent circumæquales angulos reciproca. Quoniam verò anguli plani* d e g, i k m *sunt æquales, quorum verticibus insistunt sublimes lineæ æquales* e f, k l, *quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primò positis, utrumq; utriq; ex constructione: erunt perpendiculares ex* f, l, *ad plana basium* d g, i m, *demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum* d h, i n, *si bases sint* d g, i m *inter se æquales. β Quare parallelepipeda* d h, i n, *propter bases* d g, i m *æquales, & æquales altitudines, inter se sunt γ æqualia. Quod erat propositum.*

α 14. VI.
β 35. XI.
γ 31. XI.

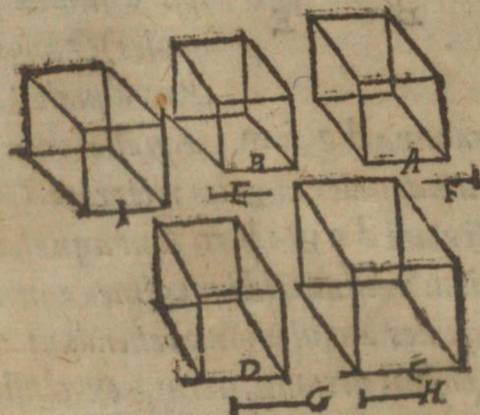
PROPOS: XXXVII.

Theorema 32.

Si quatuor rectæ lineæ *a*, *b*, *c*, *d* proportionales fuerint ut *a* ad *b*, ita *b* ad *c* & solida parallelepipeda *a b c d*, quæ ab ipsis & similia & similiter describuntur, proportionalia erunt.

Et

& si solida parallelepipeda, quæ & similia similiterq; describuntur, fuerint proportionalia, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



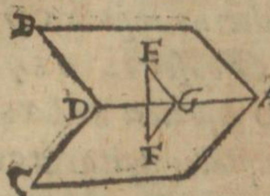
Cum eadem sit proportio a *ad* b, *quæ* c *ad* d, *eadem quoq; erunt solidorum* a *ad* b, *&* c *ad* d,
a.33.XI. a *quia sunt proportiones triplicatæ ejusdem proportionis* Contra *cum* a *ad* b, *&* b *ad* c *Solida habeant eandem proportionem triplicatam proportionis lineæ* a *ad* b, *&* c *ad* d. *Erunt etiam linearũ sunt* a *ad* b *&* c *ad* d *eædem proportiones.*

PROPOS: XXXVIII.

Theorema 33.

Si planum *a b*, ad planum *a c*, rectum fuerit, & ab aliquo puncto *e* eorum, quæ in uno sunt planorum *a b* ad

ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem *ad* cadet planorum ducta perpendicularis.

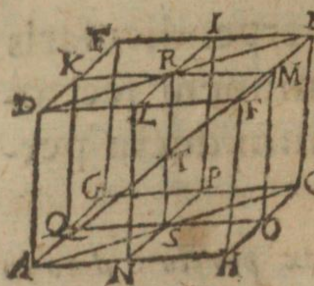


Si ex puncto e *dato in plano demissa perpendicularis ad planum* a c *non cadit in communem sectionem* a d, *sed in punctum* f *extra illum, ducatur ex* e *ad rectam* a d *perpendicularis* e g, *quæ & ad planum* a c *α recta erit. Quare ex puncto* c *extra planum* a c *ductæ sunt ad ipsum planum* a c *duæ perpendiculares* e f, f g. *Quod β absurdum.* α 4. def. XI. β 13. XI.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 34.

Si solidi parallelepipedi *a b* eorum, quæ ex adverso planorum *a c, b d* latera bifariam secta sint in *i, k, l, m, n, o, p*; per sectiones autem plana *i n, k o,* sint extensa: communis sectio *r s* planorum, & solidi parallelepipedi diameter *a b* bifariam se mutuò secabunt.



Connexis enim rectis r b, r d; s a, s c, *in triangulis* a q s, c o s, *propter* α *æqualia latera* a q, q s *ipsis* c o, o s, *& angulum* a q s β *æqualē alterno angulo* c o s: *Erunt & bases* a s, c s γ *æquales, anguliq́;* a s r *&* c s o *æquales. Sed* a s q *&* a s o *sunt duobus rectis* δ *æquales: Igitur &* c s o *&* a o s *Ac propterea* a s, c s *unam rectam lineam* ε *constituent. Eodéq; modo æquales ostendentur* b r, d r; *& unam constituere rectam* b d. *Rursus, quia utraq;* a d, b c *pararallela est & æqualis rectæ* f h, *ob parallelogrāma* a f, f c; *ipsæ quoq; parallelæ & æquales* ζ *erunt.* η *Quare & rectæ* a c, b d, *earū extrema cōjungentes, parallelæ sunt & æquales, ipsarumq́; dimidiæ* a s, b r *æquales. Quia verò* a c, b d *sunt parellelæ:* θ *erunt rectæ* a b, r s *in eodem cum ipsis plano. Ideoq; se mutuò secabunt in puncto* t. *Cum autem duo anguli* a s t, a t s, κ *æquales sint duobus angulis* b r t *&* b t r, *& latus* a s *lateri* b r; λ *erunt & reliqua latera* t a, t s *reliquis* t b, t r *æqualia: ac propterea* a b, r s, *se mutuò bifariam secant in* t. *Quod erat propositum. Hinc efficitur in omni parallelepipedo:* Diametros omnes se mutuò bifariam secare in uno pūcto, in quo bifariam dividuntur.

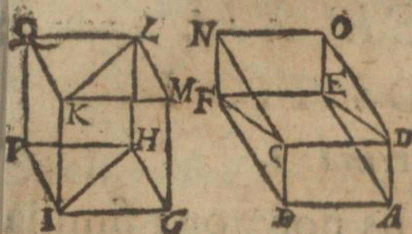
α 34. I.
β 29. I.
γ 4. I.
δ 13. I.
ε 14. I.
ζ 9. XI.
η 33. I.
θ 7. XI.
κ 29. & 15. I
λ 26. I.

PROPOSITIO XL.

Theorema 35.

SI

Si fuerint duo prismata *abcdef*, *ghiklm*, æqualis altitudinis; quorũ hoc quidem habeat basin parallelogrammum *abcd*, illud verò triangulum *ghi*: duplum autem fuerit parallelogrammũ *abcd* trianguli *ghi*: æqualia erunt ipsa prismata.



Perficiatur enim parallelepipeda an, gq, *extensis triangulorũ planis, & perfectis parallelogrãmis* bn, ao; gp, mq: *ac ductis* on, pq *quæ æque alta sunt parallelepipeda cum ipsis prismatis. Quoniam igitur parallelogrãmum* gp, α *duplum est trianguli* ghi, *sed &* ac *parallelogrammum ejusdem trianguli* ghi *est duplum. Erunt illa inter se æqualia: ipsaq; parallelepipeda æque alta super æqualibus basib.* β *æqualia, & ipsorum dimidia, quæ sunt data prismata, æqualia.* γ *Quia parallelepipeda* am, gk *per diametros* cf, de, hi, lk *planorum adversorum secantur bifariam in bina videlicet prismata. Quod erat propositum. Quæ demonstratio ostendit, propositionem tantummodo loqui de illis prismatis, quæ duo triangula habent opposita, quia jubet parallelepipeda compleri, quod non fieret, nisi utrumq; prisma opposita haberet triangula, quia jam antea esset completum, parallelepipedum*

α 34. I.
β 31. XI.
γ 32. XI.

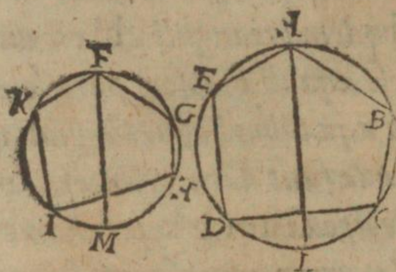


EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER XII.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

QUæ in circulis polygona similia *abcde, fghik*, inter se sunt, ut à diametris *al, fm* quadrata.



Angulis æqualibus a b c, f g h, *subtendantur rectæ* a c, f h; *& connectantur rectæ* b l, g m. *Quoniam ob similitudinem polygonorum est, ut* a b *ad* b c; *sic* f g *ad* g h: *erunt* α *triangula* a b c, f g h, *æqui angula. Est autem angulus* a c b, β *æqualis angulo* a l b; *&* f h g, *ipsi* f m g. *Erunt igitur &* a l b *&* f m g *æquales, Sed cum & anguli* a b l, f m g, *sint* γ *æquales*, tan-

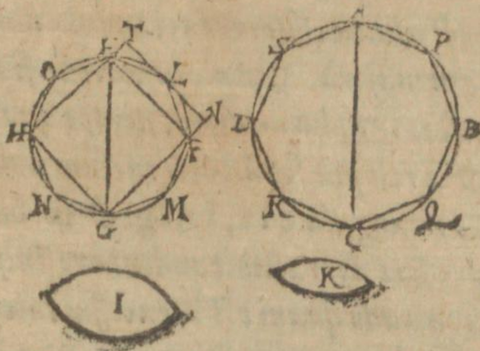
α 6. VI.
β 21. III.
γ 31. III.

anquam in semicirculo recti: ᵟ erunt & reliqui a l, g f m æquales. ᵋ Erit ergò, ut a l ad a b, a f m ad f g. Et permutando, ut a l ad f m; ta a b, ad f g. ᶻ Igitur est, ut quadratum ex a l, ad quadratum ex f m: Ita polygonum a b c d e, super a b, ad polygonum f g h i k super f g; cum tam quadrata quam polygona sint figuræ similes. ᵟ 32. I. ᵋ 4. VI. ᶻ 22. VI.

PROPOS: II.

Theorema 2.

Circuli *a bcd, efg h* inter se sunt, quẽadmodũ à diametris *ac, e h* quadrata.



Sin minus, esto, ut quadratum diametri a c, ad quadratum diametri e g; ita circulus a b c d, ad aliam magnitudinem i, quæ vel major vel minor erit circulo e f g h. Si enim esset æqualis, ᵅ haberent circuli a b c d, & e f g h eam rationem, quam diametri a e, e g; quod tamen non conceditur. ᵅ 7. V.

tur. Sit ergò i minor circulo efgh, magnitudine k, ut quidem i & k simul sint circulo efgh æquales. Circulo ergò efgh inscribatur quadratum efgh, quod quia quadrati, circulo eidem circumscripti, β dimidium est, majus erit semicirculo. Iam
β 9. IV. bisecentur peripheriæ ef, fg, gh, he, in punctis l, m, n, o; adjungaturq; rectæ le, lf, mf, mg, ng, nh, ho, oe: Ducaturq; per l Tangens tu, quæ ipsi ef erit γ parallela, occurrens rectis he, gf Pro-
γ 27. III. tractis in t & p. Quoniam itaq; triangulum elf,
δ 41. I. δ dimidium est parallelogrammi tefu, majus erit dimidio segmenti elf: & sic reliqua singula triangula dimidiis segmentorum sunt majora, & omnia simul majora dimidio omnium segmentorum simul. Eodemq; modo bisectis hisce peripherijs el, lf, iterum adjunctæ lineæ efficerent triangula dimidiis segmentorum majora. Quoniam autem si à circulo efgh, auferatur plus dimidio, nempe quadratum efgh, & à reliquis segmentis rursum plus dimidio, nempe triangula elf, fmg: & in hunc modum semper fiat detractio, tandem ε relinqueretur minor magnitudo quam est k excessus inter circu-
ε 1. X. lum efgh, & magnitudinem i. Sint itaq; segmenta circuli relicta el, lf, fm, simul sumta minora magnitudine k. Cùm ergò circulus efgh, ponatur æqualis ipsis i & k: simul segmenta illa, minora magnitudine k, subtracta ex circulo, relinquunt polygonum elfmgnho, majus magnitudine reliqua i. Huic polygono simile inscri-

batur

atur circulo a b c d. *Quoniam hæc polygona inter se sunt ut ex eorundem circulorum diametris quadrata, id est, ut circulus* a b c d *ad* i *sed polygonum* a p b q c r d s, *minus est circulo* a b c d. *Igitur & polygonum*, e l f m, g n h o, *minus erit quàm* i; *quod tamen modò demonstratum est majus. Quod absurdum. Deinde magnitudo* i *ponatur major circulo* e f g h. *Cum itaq; ponatur* a b c d *circulus ad* i *ut quadrata diametrorum* a c *&* e g: *erit & convertendo* i *ad circulum* a b c d, *ut ex* e g *&* a c *diametrorum quadrata. Ponatur autem circulus* e f g h, *ad magnitudinem* k, *ut* i *ad circulum* a b c d. *Quoniam ergò* i *est major circulo* e f g h, *major etiam erit circulus* a b c d *magnitudine* k. *Itaq; erit ut diametrorum* e g, a c, *quadrata, ita circulus* e f g h, *ad magnitudinem* k *minorem circulo* a b c d. *Quod absurdum. Quia ostensum modò est, non posse esse, ut quadratum diametri ad quadratum diametri; ita circulum ad magnitudinem minorem circulo. Sic patet etiam, nunquam habere posse quadrata duorum circulorum eandem rationem, quam circulus prior ad magnitudinem posteriore majorem. Idem enim sequetur absurdum, ut quod quadratum diametri* a c *ad quadratum diametri* e g, *habeat eandem rationem, quam circulus* a b c d, *ad magnitudinem circulo* e f g h *minorem: quod falsum esse jā constat. Cùm ergò magnitudine* i, *neq; maior neq; minor esse posit circulus* e f h g; *patet, eandē esse*

1. XII.
ex hypot.
14. V.
14. V.

circulorum rationem, quæ & ex ipsorum diametris quadratorum. Hinc etiam patet-

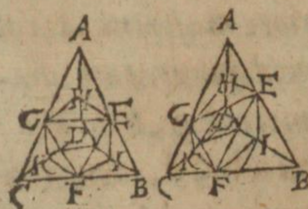
Corollarium.

Esse circulum ad circulum, ut polygona similia ipsis inscripta, quia ipsa quoq; sunt ut ex diametris quadrata.

PROPOS: III.

Theorema 3.

Omnis Pyramis *a b c d*, triangularem habens basin *a b c* dividitur in duas pyramides *a e g h*, *h i k d* æquales & similes inter se, triangulares habentes bases *a e g*, *h i k*, & similes toti, & in duo prismata *e b f g h i*, *c f g h i k* æqualia; quæ duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis..



Omnia latera pyramidis secentur bifariam in e, f, g, h, i, k. *connectanturq;* e f, f g, g e, h i, i k, k h, h e, e i, i f: *erunt duæ pyramides* a e g h, h i k d, *& æquales & similes inter se &*

& toti: Sicut & duo prismata e b f g h i, c f g h i k *inter se æqualia, & majora dimidio totius pyramidis. Quia enim* a d, b d, *latera secta sunt bifariam, & sic proportionaliter, α erunt* h i, a b, *parallelæ.* α 2. VI. *Eademq; ratione parallelæ* i k, b c: h k, a c: e g, b c: e f, a c: f g, a b: e h, b d: e i, a d: i f, d c: h g, d c: *β Sunt autem &* f g, h i, *inter se parallelæ, quia eidem* a b, *parallelæ sunt.* β 9. XI. *Sicut &* g h, f i, *quia eidem* d c. *Sunt ergò parallelogramma* a e i h, h e b i, i d h e, e b f g, g h k c, c k i f, f g h i. *Quia verò* h e, h g *rectis* d b, b c *sunt parallelæ: γ erunt anguli* e h g, b d c *æquales:* γ 10. XI. *sicut &* h e g, d b c *&* h g e, d c b. *δ Sunt ergò triangulorum* h e g, d b c *latera circum æquales angulos proportionalia, & triangula similia.* δ 4. VI. *Sed & triangula* h a e, h a g, a e g; *triangulis* d a b d a c, a b c *sunt δ similia: Sunt ergò pyramides* a e g h, a b c d *ε similes.* ε 9. defi. XI. *Rursus, quia recta* hi, hk, *rectis* a b, a c, *sunt parallelæ; erunt anguli* i h k, b a c *æquales: γ Itemq;* h i k, a b c; h k i, a c b. *Quare triangula* h i k, a b c *habent circum æquales angulos latera proportionalia, & sunt similia. δ Sunt autem & triangula* d h i, d i k, d k h, *triangulis* d a b, d b c, d c a *similia: Itaq; pyramides* h i k d, a b c d *sunt ε similes. Quoniam autem triangula* ahe, h d i, *δ sunt similia triangulo* a d b; *ipsa etiam inter se ζ erunt similia.* ζ 21. VI. *Et quia super æquales rectas* a h, h d, *sunt constituta: η erunt etiam æqualia.* η Lemma 22. VI. *Ita etiam*

 a h g,

a h g, h d k, *triangula similia, super æquales bases* a h, h d *constituta sunt etiam æqualia; ut &* a e g & h i k, *super* a e & h i ϑ *æquales. Et deniq;*
ϑ 14. I. c h g, i d k, *super* h e, d i ϑ *æquales, æqualia sunt.*
κ 10. def. XI. κ *Itaq; Pyramides similes* a e g h, & h i k d, *etiam sunt æquales. Rursus quia* e h, h g, g e, *sunt*
λ 8. I. ϑ *æquales & parallelæ rectis* b i, i f, f b: λ *erunt triangula* e h g, b i f, *æquiangula inter se & æqualia & similia.* μ *Sunt etiam parallela, quia* e h, h g, *per quas planum* e h g *est ductum, parallelæ sunt rectis* b i, i f, *per quas planum* b i f *est ductũ. Igitur solidum* b i f, g h e, *sub duobus his triangulis ex adverso æqualibus parallelis & similibus, & tribus parallelogrammis* e g f b, b e h i, i f g h, *contentum est prisma. Eodemq; modo propter triangula* c f g, h i k, *ex adverso* λ *æqualia parallela*
μ 15. XI. *&* μ *similia, & propter parallelogramma* c f i k, k h g c, i f g h, *quibus continetur; solidum* c f g h i k, *est prisma. Quod cùm cum priore* b i f g h e *sit ejusdem altitudinis, utpote inter plana parallela* b c g e, h i k *& parallelogrammum* e b f g *est*
ν 41. I. ν *duplum trianguli* c f g, ξ *erunt hæc inter se æ-*
ξ 40. XI. *qualia. Deniq; quia prisma* e b f g h i *majus est pyramide* e b f i; *totum parte, quæ æqualis & similis est pyramidibus* a e g h, & h i k d. *Ex æqualitate & similitudine triangulorum erunt illa duo prismata pyramidibus* a e g h, & h i k d

majora

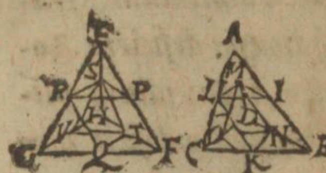
majora: adeoq; excedent quidem dimidium, pyramidis a b c d: *hæc verò à dimidio ejus deficient. Toto enim in partes inæquales diviso, dimidium quidem superat pars major: sed à dimidio deficit minor.*

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si fuerint duæ pyramides *a b c d*, *e f g h* ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases *a bc*, *e f g*; Sit autem illarum utraque divisa & in duas pyramides *a i l m*, *m n o d*, & *e p r s*, *s t u h*, æquales inter se & similes toti & in duo prismata æqualia *i b k l m n*, *c k l m n o*, & *p f q r s t*, *g q r s t u*, ac eodem modo divisa sit utraq; pyramidum *a i l m*, *m n o d* & *e p r s*, *s t u h*, quæ ex superiore divisione natæ sunt, idq; semper fiat; erit, ut unius pyramidis *a b c d* basis *a b c*, ad alterius pyramidis *e f g h* basin *e f g*; ita & omnia, quæ in una pyramide prismata ad omnia, quæ in altera pyramide prismata multitudine æqualia.

Con-



Constructio cum praece-dente coincidit. Cùm ergò sit, ut b c *ad* c k *ita* f g *ad* g r. *Quia utraq;* b c & f g *linea est bifariam secta: α Sint autem* a b c, l k c: *itemq;* e f g & r q g *similia, similiterq; posita; β erit, ut* a b c, *ad* l k c, *ita* e f g *ad* r q g. *Et permutando, ut* a b c *ad* e f g, *ita* l k c *ad* r q g. *Sed ut* l k c *ad* r q g, *ita est prisma* c k l m n o, *ad prisma* g q r s t u, *ita etiam prisma* i b k l m n, *ad prisma* p f q r s t, *tanquam illis aequalia. Et ut unum prisma* i b k l m n, *ad unum prisma* p f q r s t: *γ ita sunt duo prismata* i b k l m n, c k l m n o, *ad duo prismata* p f q r s t, g k r t s u. *Erunt igitur duo prismata in pyramide* a b c d, *ad duo prismata in pyramide* e f g h, *ut basis* a b c d, *ad basin* e f g h. *Eodem modo demonstratur, ita esse duo prismata in pyramide* a i l m, m n o d, *factis in pyramide* a b c d, *ad bina prismata in pyramidibus* e p r s, s t u h *factis in pyramide* e f g h, *ut sunt pyramidum illarum bases* a i l, & m n o, *ad bases harum* e p r & s t u. *Et sic porrò eadem adhibita divisione. Sed ut sunt illae bases, ad has: ita est* l k c, *basis, illis aequalis, & similis, ad basin* r q g, *his similem & aequalem, hoc est, ita est* a b c *ad* e f g. *Itaq; erunt quoq; prismata cujuslibet pyramidis factae, in pyramide* a b c d, *ad prismata cujuslibet pyramidis factae in pyramide* e f g h, *ut basis* a b c, *ad basin* e f g:

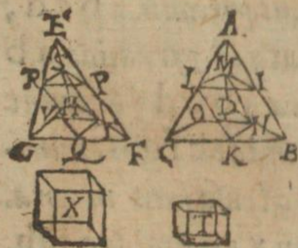
α 4. VI.
β 22. VI.
γ 5. VI.

ac propterea erunt etiam, ut prismata pyramidis a b c d *ad prismata pyramidis* e f g h; *ita prismata tam pyramidis* a i l m, *ad prismata pyramidis* e p r s, *quàm prismata pyramidis* m n o d, *ad prismata pyramidis* s t u h: *& sic deinceps. Quare, cum sint, ut duo prismata pyramidis* a b c d, *ad duo prismata pyramidis* e f g h: γ *Ita omnia prismata in pyramidibus* a b c d, a i l m, m n o d *simul, ad omnia prismata in pyramidibus* e f g h, e p r s, i t u h *simul: si hæc illis multitudine sint æqualia. Erunt etiam, ut basis* a b c, *ad basin* e f g; *ita omnia prismata in pyramide* a b c d, *ad omnia prismata in pyramide* e f g h. *Quod erat propositum.* γ 12.V.

PROPOS: V.

Theorema 5.

Sub eadem altitudine existentes pyramides *a b c d*, *e f g h*, & triangulares habentes bases *a b c*, *e f g*, inter se sunt, ut bases.



Sin minus, esto, ut basis a b c *ad basin* e f g; *Ita pyramis* a b c d, *ad solidum* x, *quod majus vel minus est pyramide* e f g h. *Sit primò minus magnitudine* y.

dine y. α Dividatur ergò pyramis e f g h in duas
α 3. XII. pyramides æquales, & duo prismata æqualia.
Rursusq; hæ factæ pyramides in alias duas pyramides & prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide e f g h, auferatur plus quàm dimidium, duo nempe prismata p f q r s t, g q r s t n, κ majora dimidio pyramidis e f g h: Itemq; è reliquis pyramidibus e p r s, s t u h, plus dimidio, utpote illarum prismata; Et sic deinceps;
β 1. X. β relinquitur tandem minor magnitudo, magnitudine y, seu excessu, quo pyramis e f g h, superat solidum x. Relicta ergò magnitudo jam sit minor. Cum verò pyramis e f g h, ponatur æqualis solidis x & y: Erunt reliqua prismata in pyramide e f g h, majora solido x. Dividatur pyramis a b c d in duas pyramides æquales & duo prismata æqualia. Itemq; factæ pyramides a i l m, m n o d, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia. Quod toties fiat; quoties in pyramide
γ 4. XII. e f g h est factum. γ Quoniam ergò omnia prismata in pyramide a b c d, ad omnia prismata numero æqualia, in pyramide e f g h sunt, ut basis a b c, ad basin e f g, id est, ut pyramis a b c d, ad solidum x; omniaq; prismata in pyramide a b c d minora quam pyramis tota a b c d: δ erunt
δ 14. V. etiam omnia prismata in pyramide e f g h, minora solido x; quæ tamen modo ostensa sunt majora. Minus ergò nequit esse solidum x pyramide e f g h.

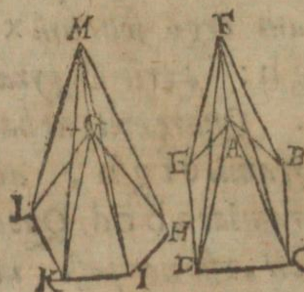
Deinde sit eadem majus. Quoniam ergò ponitur pyramis a b c d, *ad solidum* x, *ut basis* a b c, *ad basin* e f g. *Erit convertendo solidum* x, *ad* a b c d, *ut* e f g, *ad* a b c. *Ponatur autem solidum* x, *ad pyramidem* a b c d, *ut* e f g h *pyramis, ad solidum* y. *Quoniam ergò solidum* x, *majus ponitur pyramide* e f g h: *erit & pyramidis* a b c d *major solido* y. *Quare erit, ut basis* e f g *ad basin* a b c; *ita pyramis* e f g h, *ad solidum* y, *quod minus est pyramide* a b c d. *Quod absurdum. Quia ostensum est, esse non posse, ut basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Cum ergò pyramis* e f g h *nec minor nec major sit solido* x, *erit ipsi æqualis. Erit ergo, basis* a b c, *ad basin* e f g, *ita pyramis* a b c d, *ad pyramidem* e f g h, *id est ad* x. *Manifesta etiam hinc est conversa, quod si pyramides triangulares sint ut bases, quod sint sub eadem altitudine. Et quod si pyramides super eadem sive æqualibus basibus, ejusdemq; sint altitudinis, etiam sint æquales.* 7.V.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Sub

Sub eadem altitudine existentes pyramides *abcdef, ghiklm* & polygonas habentes bases *abcde, ghikl*; inter se sunt ut bases.



Resolutis basibus in triangula numero æqualia: erit quælibet pyramis divisa in totidem pyramides triangulares. a Quia verò est, ut basis a b c, *ad basin* a c d; *ita pyramis* a b c f, *ad pyramidem* a c d f. *a Rursusq; ut bases* a c d, a d e; *ita pyramides* a c d f, a d e f. *Igitur ex æquo, ut* a b c d, *ad* a d e; *ita* a b c d f, *ad* a e d f. *Et componendo, ut bases* a b c d e, a d e; *sic pyramides* a b c d e f, *&* a e d f. *Similiter erit, ut bases* g h i k l, *&* g k l; *ita pyramides* g h i k l m, *&* g k l m: *Et convertendo, ut bases* g k l, g h i k l, g h i k l; *ita pyramides* g k l m, *&* *&* g h i k l m. *a Rursus queniam est, ut bases,* a d e *ad* g k l; *ita pyramides* a d e f, *ad* g k l m: *erunt quatuor bases,* a b c d e, a d e g k l, g h i k l, *cum quatuor pyramidibus* a b c d e f, a d e f, g k l m, g h i k l m, *in eadem ratione. Erit ergò ex æquo, ut bases* a b c d e *ad* g h i k l; *ita pyramides* a b c d e f *ad* g h i k l m. *Quod erat propositum.*

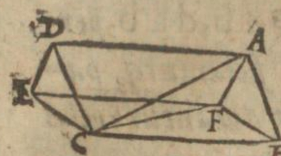
a 5. XI.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Omne prisma *abcdef*, triangularem habens basin, dividitur in tres pyramides *abcf*, *adcf*, *efdc* æquales inter se, triangulares bases habentes.



Ducantur in tribus parallelogrammis tres diagonij a c, cf, f d, *α dividentes ea in triangula inter se æqualia. Est ergò, ut bases* a b c, a d c *α æquales; ita pyramides* a b c f, a d c f *ejusdem altitudinis, quæ est perpendicularis ex* f *demissa in planum* a b c d *β æquales. Ita etiã æquales sunt pyramides* a d f c, e f d c, *super æquales bases* a d f, d e f *constitutæ, sub eadẽ altitudine, ceu perpendiculari à vertice* c *ad planũ* a d e f *demissa. Sed pyramis* a d c f, *est eadẽ pyramidi* a d f c, *quippe iisdem contenta planis. Igitur tres pyramides* a b c f, a d c f, e f d c *vel* c d e f, *æquales inter se sunt; & sic prisma* a b c d e f *in tres æquales pyramides est divisum. Vnde patet*: Quamque pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum ipsa habentis basin & altitudinem.

α 34. I.

β 5. X.

PROPOS: VIII.

Theorema 8.

Similes pyramides *a b c d, e f g h*, quæ triangulares habent bases *a b c, e f g*; in triplicata sunt homologorum laterum *b c, f g*, ratione.

Extendantur plana triangulorum a b c, c d b, d a b, *perficianturq; parallelogramma* b i, b k, b l: *& ducantur rectæ ipsis* a i, a l *æquales & parallelæ* l m, i m: *connectaturq;* k m, *ut parallelepipedum completum sit* b m *ejusdem altitudinis cum pyramide, ut parallela plana* α *ostendunt. Eodemq; modo perficiatur*

α 15. XI. *parallelepipedũ* f q. *Quoniam igitur propter similitudinem pyramidum & anguli* a b c, e f g *sunt æquales; estq; ut* a b *ad* b c, *ita* e f *ad* f g; *erunt parallelogramma* b i, f n *similia: Ita, cum anguli* a b d, e f h *sint æquales; & sit, ut* a b *ad* b d, *ita* e f *ad* h f: *itẽ anguli* d b c, h f g *æquales, & sitút* d b *ad* b c, *ita* h f *ad* f g; *erunt & parallelogrammma* b l, b k *parallelogrammis* f p, f o *similia. Sed tam tria* b i, b k, b l, *parallelepipedi* b m, *reliquis tribus oppositis* d m, a m, c m; *quàm tria* f n, f o, e p, *parallelepipedi* f q, *reliquis oppo-*

β 4. XI. *sitis tribus* h q, f q, g q, *sunt æqualia* β *& similia; adeoq; sex plana parallelepipedorum* b m, & f q

sunt

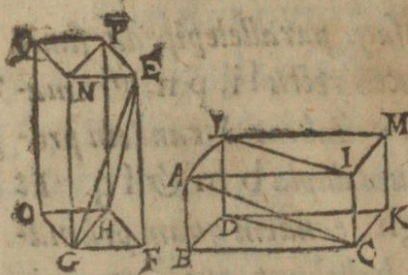
sunt inter se similia ipsaq; parallelepipeda similia γ. *Quoniam verò ductis rectis* l i, p n, *Prismata* d b c i l a, h f g n p e *habent* δ *eandem proportionem, quam ipsorum dupla* b m *&* f q. *Et pyramides* a b c d, e f g h, *eandem quam prismata dicta earum tripla:* ε *habebunt quoq; pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda.* ζ *Sed cum proportio parallelepipedorũ* b m, f q *sit triplicata rationis homologorum laterum* b c, f g: *erit etiam proportio pyramidum triplicata eorundem laterum* b c, f g. *Quod ipsum quoq; locum habet in pyramidibus similibus plurium laterum, sicut & in prismatibus similibus.*

γ 9. def. XI.
δ 15. V.
ε 11. V.
ζ 33. XI.

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Æqualium pyramidum *a b c d*, *e f g h*, & triangulares bases *a b c*, *e f g* habentium, reciprocantur bases & altitudines; & quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales.



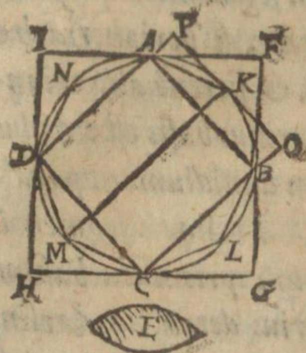
Perficiantur, ut in præcedenti, parallelepipeda b m, f q, earundem altitudinum cum pyramidibus; connectāturq; rectæ l i, p n; erunt prismata d b c i l a, h f g n p e, tanquam tripla pyramidum æqualium, inter se æqualia ipsaq; parallelepipeda b m, f q prismatum dupla æqualia:
α 34.XI. α Eorum itaq; bases reciprocantur altitudinibus, id est, erit, ut basis b i, ad basin f n: ita altitudo solidi f q, ad altitudinem solidi b m. β Sed ut sunt
β 15. V. bases b i & f n, ita sunt triangula a b c, e f g. Itaq; ut sunt bases a b c, e f g; ita sunt altitudines pyramidum e f g h & a b c d. Quippe eædem cum parellelepipedorum altitudinibus; & sic reciprocātur bases altitudinibus. Iam sint bases & altitudines reciprocæ. Erunt etiam pyramides æquales. Constructa figura ut prius, cùm sit, ut a b c ad e f g; ita parallelogrammū b i, ad f n. Sintq; eædem altitudines parallolepipedorum & pyramidum; erunt etiam bases & altitudines parallelepipedorum reciprocæ; Et sic α æqualia b m, f q. Quare & ipsorum dimidia prismata, & horum partes tertiæ pyramides, sunt æquales. Quod ipsum de reliquis non triangularibus pyramidibus & prismatis quibuscunq; potest ostendi.

PRO-

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin *a b c d*, habentis & altitudinem æqualem.



Sin minus est cylindrus coni triplus, erit vel major vel minor triplo coni. Sit ergò major magnitudine e, *& sic æqualis triplo coni & magnitudini* e *simul. Circulo ceu basi utriusq; inscribatur quadratū* a b c d, *& circa eundem quadratum* f g h i, *super quæ quadrata intelligantur sub altitudine coni & cylindri erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum* abcd, α *dimidium est quadrati* fg hi; β *estq; ut basis ad basin: ita parallelepipedū, ad parallelepipedum ejusdē altitudinis. Erit etiam unū alterius duplum. Et minus super basi* a b c d, *majus dimidio cylindri. Iam secentur peripheriæ* a b, b c, c d, d a, *bifariam in punctis* k, l, m, n : *conjunganturq; rectæ* k a, k b, l b, l c, m c, m d, n d, n a, *& per* k *agatur tangens* o p, γ *parallela ipsi* a b, *occurrens rectis* d a, cb *productis in punctis* o, p: *& super* a k b, a b o p, *intelligantur prismata*

α 9. IV.
β 32. XI.
γ 27. III.

smata æquè alta cono vel cylindro. Quoniam ergò
δ 41. I. a k b *est* δ *dimidium* a b o p, *erit & illius pri-*
ε 7. XII. *sma hujus* ε *dimidium: Eritq; prisma basis* a k b *majus, quàm dimidium segmenti cylindri, cujus basis continetur linea* a b, *& arcu* a k b. *Quod ipsum de reliquis segmentis tribus verum est. Eruntq; omnia prismata quatuor triangulorum simul majora dimidio, omnium segmentorum cylindri simul. Idemq; sequeretur, si peripheriæ hæ iterum bifariam secarentur, & fierent alia triangula &c. Si ergò à cylindro, cujus basis est circulus* a b c d, *auferatur plus, quam dimidium, ut parallelepipedum basis* a b c d, *& à reliquis segmentis plus, quàm dimidium, nimirum, prismata basium* a k b, b l c. *Et sic fiat ulterius detractio:* ζ *relin-*
ζ per 1. X. *quitur tandem minor magnitudo, quàm* e, *excessus cylindri supra triplũ coni. Sint jã segmenta cylindri relicta basium* a k, k b, b l *simul, sumpta minora, quam* e. *Cùm ergò cylindrus ponatur æqualis triplo coni & magnitudini* e *simul, ablatis segmentis illis ex cylindro & ex triplo coni una cum magnitudine* e, *ipsa* e, *quæ major est dictis segmentis erit reliquum prisma basis multangulæ* a k b l, c m d n, *ejusdem altitudinis cum cono & cylindro, majus quam reliquum triplũ coni. Erit itaq; conus minor tertia parte Prismatis seu Pyramide, cujus eadem ipso cũ est basis & altitudo, totum parte minus, quod absurdum. Non ergò major est cylindrus triplo coni.*

Sit

Sit jã minor, & sic conus major tertiâ parte cylindri magnitudine e, *ut conus sit æqualis tertiæ parti cylindri, & magnitudini* e *simul. Constructis ijs dẽ Pyramis super α dimidia basi* a b c d *descripta erit* β *dimidia pyramidis super* f g h i. *Majorque pyramis super* a b c d, *coni super* a b c d β 6. XII.
circulo descripti dimidio. Rursus jam, ut antea, divisis peripheriis, & completis triangulis, pyramis super a k b *major est dimidio segmenti coni æquè alti, super basi linea* a b *& peripheria* a k b *contenta. Quod ipsum de reliquorum triangulorum pyramidibus, & segmentorum conis dimidijs verum est. Quæ omnes pyramides simul majores sunt quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Idem sequeretur, si peripheriæ hæ rursum secarẽtur bifariam. Si jam ex cono super circulo* a b c d *facto auferatur pyramis dimidio major, cujus basis* a bcd *æquè alta: relinquitur minus dimidio, & à reliquis segmentis iterum plus dimidio, ut pyramides super* a k b, b l c, c m d *&c. Et sic ulterius fiat detractio, & relinquitur tandem minor magnitudo quam* e, *excessus coni supra tertiam partem cylindri. Sint jam segmenta coni relicta* a k, k b, b l *simul sumta minora quam* e. *Cum igitur Conus ponatur æqualis cylindri parti tertiæ, & magnitudini* e *simul; Si ex cono detrahãtur segmenta prædicta, & ex tertia parte una cum magnitudine* e, *quam major est præfatis coni segmentis*

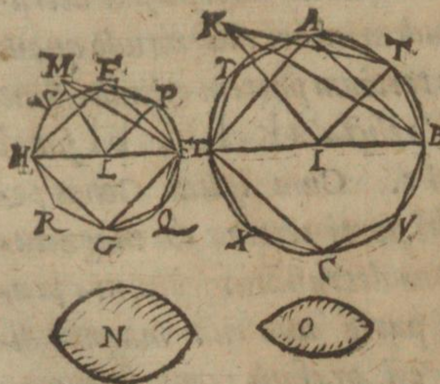
 erit

erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum a k b l, c m d n, *ejusdem altitudinis cum cono & cylindro, major tertia parte cylindri reliqua. Et sic triplum pyramidis majus cylindro. Proinde cum prisma ejusdem baseos cum pyramide, & altitudinis cum cono & cylindro, triplum sit pyramidis: erit prisma majus cylindro, pars toto. Non ergò cylindrus est minor triplo coni. Sed neq; major, ut antea patet. Ergò æqualis. Et sic conus quilibet cujuslibet cylindri æquè alti, & ejusdem basis, est pars tertia. Quod erat propositum.*

PROPOSITIO XI.

Theorema 11.

Sub eadem *i k, l m,* altitudine existẽtes coni & cylindri inter se sunt ut bases *ab cd, efg h.*



Sin minus, esto, ut basis a b c d, *ad basin* e f g h, *sic Conus, super* a b c d, *ad aliam magnitudinem* n, *quæ vel minor vel major est cono* e f g h m. *Sit ergò minor,*

minor magnitudine o, ut conus sit æqualis ipsis n & o simul. Inscripto quadrato e f g h in circulum, secentur quadrantes bifariam in p q, r, s, quæ puncta connectantur cum e, f, g, h. Quoniam ergò, si ex cono e f g h m detrahatur pyramis, super basin e f g h ejusdem altitudinis, & à reliquis segmentis auferantur pyramides ejusdem altitudinis basium e p f, f q g: eodemq; modo semper fiat, detractio, semperq; plus dimidio subtrahatur, ut in præcedenti propositione; α relinquitur tandem minor magnitudo quàm o, excessus coni e f g h m super n. Sint ergò relicta segmenta basium coni e p, p f, f q simul sumpta minora quàm o. Cum igitur Conus e f g h m ponatur æqualis ipsis n & o simul; si ex cono detrahantur dicta ipsius segmenta, sed ex n o simul ipsa o major dictis segmentis simul, erit reliqua pyramis cujus basis est polygonum e p f q g h s ejusdem altitudinis cum Cono, major quàm n. Huic ergò polygono simile inscribatur etiam circulo, a b c d, ut in secunda propositione est factum, & ducantur diametri b d f h. β Quoniam ergò est, ut circulus a b c d, ad circulum e f g h; ita polygonum a t b u c x d y, ad polygonum e p f q g r h s. Sed ut est circulus, ad circulum; ita ponitur conus a b c d k, ad magnitudinem n; & ut γ polygonum ad polygonum: ita est pyramis ad pyramidem ejusdem altitudinis cũ Conis. Erit etiam pyramis ad pyramidem, ut conus a b c d k ad n. Cumq;

α 1. XI.
β 2. XII.
γ 6. XII.

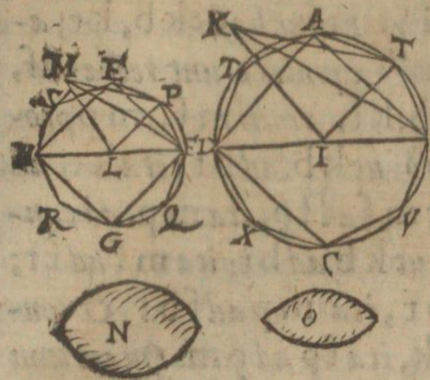
n. *Cumq;* Conus a b c d k *sit major pyramide* a t b u c x d y k: ᵈ *erit &* n *major pyramide* e p f q g r h s m: *qua tamen modo ostensa est minor. Quod absurdum. Non ergò minor est* n, *quàm conus* e f g h m. *Hinc ponatur major magnitudo* n *cono* e f g h m. *Cùm sit, ut circuli,* a b c d, *ad* e f g h; *ita conus* a b c d k *ad* n: *etiam convertendo erit, ut circuli* e f g h, *ad* a b c d; *ita* n *ad conum* a b c d k; *Iam ponatur: ut* n *ad Conum* a b c d k; *ita conus* e f g h m *ad* o: *Et quia* n *major ponitur cono* e f g h m; ᵈ *erit conus* a b c d k *major, quam* o, *Quare erit, ut circuli;* e f g h, *ad* a b c d: *ita conus* e f g h m, *ad magnitudinem* o, *quæ minor cono* a b c dk *est. Quod absurdum, quia ostensum modo est, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut basis est hujus coni, ad basin illius coni. Itaq;* n *non est major* e f g h m: *ac proinde æqualis. Quare cum sit, ut circuli* a b c d, *ad* e f g h: *ita conus* a b c d k
e 7. V. *ad* n, *id est* ᵉ *ad conum* e f g h m: *erit, ut basis ad*
ξ 10. XII. *basin, ita conus ad conum, si sint æquè alti. Cumq;*
n 15. V. *super iisdē basibus æquè alti cylindri cum conis sint* ξ *eorum tripli.* ⁿ *Erit etiam, ut basis ad basin, ita cylindrus ad cylindrum, si sint æquè alti.*

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Similes

Similes Coni & Cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum *b d*, *f h*, quæ in basibus *a b c d*, *e f g h*.



Sin minus, habeat conus a b c d k, *ad aliquam magnitudinem* n, *triplicatam rationem diametrorum*, b d, f h; *erit ergò* n *vel minor vel major cono* e f g h m. *Primum sit* n *minor, cono* e f g h m, *magnitudine* o; *adhibitaq; præcedentis constructione, erit rursus pyramis* e p f q g r h s m, *major quam* n. *Iam ducantur* k b, k t, m f, m p, *ut fiant triangula* b k t, f m p; *connectanturq;* t i, p l. *Quoniam igitur Coni* a b c d k, e f g h m *ponuntur similes*; α *erit, ut diameter* b d, *ad diametrum* f h: β *vel, ut semidiameter* b i *ad semidiametrum* f l, *ita axis* i k, *ad axem* m l. *Cumq; anguli* b i k, f l m *sint* γ *recti, quod & coni ponantur recti; & ipsorum axes ad bases recti:* δ *erunt triangula* b i k, f m l *æquiangula: adeoq;* ε *ut* k b *ad* b i, *ita* m f *ad* f l. *Sed ut* b i *ad* b t, *ita* f l *ad* f b, *ob similitudinem* ζ *triangulorum* b i t, f l p. (*quia anguli* b i t, f l p, *similibus arcubus insistentes sunt æquales, circumq; ipsos latera proportionalia.*) η

α 24. defin. XI.
β 15. V.
γ 3. def. XI
δ 6. VI.
ε 4. VI.
ζ 4. I.
η 7. V.

Itaq;

Itaq; ex æquo, ut kb ad pt, ita mf ad fp. Rursus, quia latera ki, ib, trianguli kib, æqualia sunt lateribus ki, it, trianguli kit, & anguli ipsi, comprehensi recti γ. Erunt bases kb, kt, æquales. ζ. Eodemq; modo æquales erunt rectæ mf, mp, atq; sic rectæ kb, kt, rectis mf, mp proportionales: Quia verò, ut kb, ad bt; ita kt, ad eandem bt: item, ut mf ad fp, ita mp, ad eandem fp. Erat autem ut kb ad bt; ita mf ad fr; erit quoq; ut kt, ad bt, ita mp ad fb: & convertendo, ut bt ad tk, ita fp ad pm. Quare cum sit ut tk ad kb, ita pm ad fm; Et ut kb ad bt; ita mf ad fp. Et, ut bt ad tk, ita fp ad pm; habebunt triangula bkt, fmp, latera proportionalia: Eruntq; δ æquiangula & similia. Neq; aliter reliqua triangula pyramides atbucxdyk, & epfqgrhsm, ambientia inter se similia ostẽdentur. Cumq; multitudine sint æqualia, erunt dictæ pyramides θ similes & in κ triplicata proportione homologorum laterum. Vt autem bt ad fp, ita est bi ad fl, ob similitudinem triangulorũ bit,

θ 9. def. XI. flp: β Et ut bi ad fl, ita bd ad fh. Igitur py-

κ 8. XII. ramis ad pyramidem habebit quoq; proportionem triplicatam diametrorum bd, fh. Sed earundem diametrorum proportionem triplicatã habebat Conus abcdk ad n: Erit igitur, ut pyramis atbucxdyk ad pyramidem epfqgrhsm; ita conus abcdk ad n. Cùm igitur pyramis prior sit

minor

minor Cono a b c d k, *pars toto: erit etiam posterior minor magnitudine* n, *qua tamen modò ostensa est major. Quod absurdum. Non ergò minor est magnitudo* n, *Cono* e f g h m. *Iam sit* n *major cono* e f g h m. *Cùm ergò Conus* a b c d k *habeat proportionem triplicatam diametri* b d *ad diametrum* f h; *Sicut & pyramis* a t b u c x d y k *ad pyramidem* e p f q g r h s m: *erit, ut conus* a b c d k *ad* n, *ita pyramis ad pyramidem*: *& convertendo, ut* n *ad conum* a b c d k, *ita pyramis* e p f q g r h s m *ad pyramidē* a t b u c x d y k. *Quare cum pyramides illæ habeant rationem triplicatam homologorum laterum* p f *ad* t b, *id est, diametri* f h, *ad* d b, *habebit etiam* n *ad conum* a b c d k *rationem triplicatam diametri* f h *ad* b d. *Ponatur ergò ut* n *ad conum* a b c d k: *ita conus* e f g h m, *ad* o. *Erit etiam inter hæc ratio triplicata diametrorum* f h *ad* b d. *Cum autem* n *ponatur major cono* e f g h m: λ *erit & conus* a b c d k *major quàm* o. *Itaq; conus* e f g h m *ad* o *minorem cono* a b c d k, *proportionem habet triplicatam diametrorum* f h *ad* b d. *Quod absurdum: quia ostensum est modo non posse Conum ad magnitudinem alio cono minorem; proportionem habere triplicatam diametrorum baseos. Itaq; nec major est* n, *quam conus* e f g h m *sed sunt æquales. Ideoq; conus* a b c d k, *ad* n *&* μ *conum* e f g h m, *habet rationem triplicatam diametrorum* f h *ad* b d. *Et*

λ 14. V.

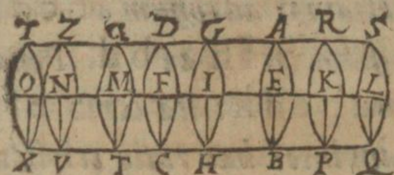
μ 7. V.

b d. *Et quia eorundem conorum cylindri sunt tripli, ß habebunt ipsi quoq; eandem rationem triplicatatam diametrorum basium* f h *ad* b d.

PROPOSITIO XIII.

Theorema 13.

Si Cylindrus *a b c d*, plano *g h*, secetur, adversis planis *a b*, *c d*, parallelo: Erit ut cylindrus, *a b h g*, ad cylindrũ, *g h c d*; ita axis, *c i*, ad axem *i f*.



Intelligatur enim Cylindrus a b c d *utrinq; protractus, una cum axe & rectangulo* e g, *ex cujus revolutione est genitus. Sumanturq; in axe producto rectæ* e k, k l, *æquales ipsi* e l: *& aliæ* f m, m n, n o, *æquales ipsi* i f, *& per puncta*, i, k, l, m, n, o, *ducantur rectæ* i h, k p, l q, m t, n u, o x *æquales & parallelæ ipsis* e b, f c; *quæ ad revolutionem rectanguli describent circulos* g h, p r, q s, t a, u z, x y, *parallelos & æquales circulis* a b, c d: *erunt ergò* s p, p a, a h, h d, d t, t z, z x. *cylindri, ex definitione, componentes cylindrum totum* s q x y. *Quoniam verò tam cylindri* s p, p a, a h, *super æquales bases* q s, p r, b a, *& sub*

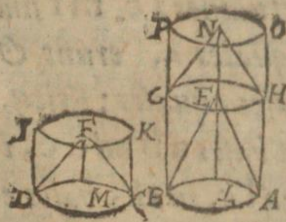
æqualibus

æqualibus altitudinibus, k l, e k, i e, *sunt* α *æquales; quàm cylindri* x z, z t, t d, d h, *sub æquales bases* x y. u z, t a, c d, *& sub altitudinibus æqualibus* n o, m n, f m, i f. *Erit tàm multiplex cylindrus* x g *cylindri* c g, *quàm multiplex est axis* i o, *ipsius* i f: *Et tam multiplex cylindrus* s h *cylindri* a h, *quam multiplex axis* i l *ipsius* i e. *Si ergò axes* i l *&* i o *sunt æquales* α: *æquales etiam sunt cylindri* s h *&* x g; *si verò axis axe est major, etiam cylindrus cylindro major est; & si minor, minor, in quacunq; multiplicatione. Erit* β *igitur axis* i e, *ad axem* i f, *ut cyindrus* a h, *ad cylindrum* g h. α 11.XII. β 7. def.V.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Super æqualibus basibus *a b*, *c d*, existentes, coni *a b c*, *c d f*, & cylindri *a b g h*, *c d i k*, inter se sunt ut altitudines *l e*, *m f*.



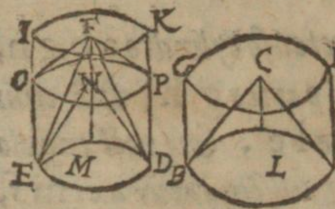
Extenso cylindro a b g h, *ad partes* g h, *unà cum axe* l e, *& rectangulo* a g; *abscindatur axi* m f, *æqualis* e n, *ut* n *sit centrum circuli, æqualis & paralleli ipsi* g h:

& fiat cylindrus g h o p *ejusdem altitudinis cum*
α 11. XII. *cylindro* c d i k, *qui & inter se sunt æquales* α: *ad*
β 7. V. *quos cylindrus* a g β *habet eandem rationem. Est*
γ 13. XII. γ *autem cylindrus* a g *ad cylindrum* a p, *ut axis*
δ 10. XII. *vel altitudo* l e, *ad axem vel altitudinem* e n, *id*
ε 15. V. *est, ad* m f *huic æqualem. Igitur & cylindri* a g,
c i *sunt ut altitudines* l e, m f. *Cumq; coni* a b e,
c d f *sint partes* δ *tertiæ cylindrorum*, ε *erunt etiam coni hi, ut altitudines* l e *ad* m f.

PROPOS: XV.

Theorema 15.

Æqualium conorum *abc*, *def*, & cylindrorum *abgh*, *deik*, reciprocantur baſes *ab*, *de*, & altitudines *lc*, *mf*: & quorum conorum & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines illi ſunt æquales.



α 11. XII. *In cylindris enim si altitudines* l c, m f *sint æquales* α, *erunt & bases æquales*: Eritq; *ut bases* a b *ad* d e, *ita altitudines æquales* m f *ad* l c, *id est, bases erunt altitudinibus reciprocæ. Si verò altitudines*

l-

l c, m f, *sint inæqu ales; absc indatur ex* m f, m n, *æqualis ipsi* l c, *& cent o* n *describatur planum ipsi basi* d e *æquale & parall lum, ut fiant duo cylindri* d o, o k. *Quoniam ergo æquales ponuntur cylindri* a g, d i, *habebunt ad eundem cylindrum* d o, *eandem rationem. Sunt autem cylindri* a g, d o, *ut bases* a b, d e, *propter æquales altitudines; & cylindri* d i, d o, *ut altitudines* m f *&* m n *propter identitatem basis & cylindri. Erit ergò ut bases* a b *ad* d e; *ita altitudines* m f *ad* m n, *vel huic æqualem* l c, *id est, bases & altitudines sunt reciprocæ. In conis, si ponantur æquales,* a b c, d e f; *erunt & eorum cylindri* a h, d i, *quorum sunt partes tertiæ, æquales. Et quia horum bases & altitudines reciprocantur. Ergo & conorum. Si verò ponantur bases & altitudines reciprocæ, etiam coni & cylindri erunt æquales. In cylindris ergò* a g, d i, *si altitudines* i c, m f *sint æquales, cum bases* a b, d e *sint, ut altitudines: erũt & ipsæ & toti cylindri æquales: si verò altitudines sint inæquales, cũ ponantur altitudines* m f *ad* l c, *id est,* m n *ut bases* a d *ad* d e: *Sintq; bases* a b *ad* d c *ut cylindri* a g *ad* d o, *propter altitudines æquales, & ut altitudines* m f, *ad* m n, *ita cylindri* d i *ad* d o *propter identitatem basis* d e, *Erunt cylindri* a g, d i *in eadem ratione, ad cylindrum* d o, *& sic æquales. In conis verò reciprocis positis basibus, & altitudinibus; ipsorum quoq; tri-*

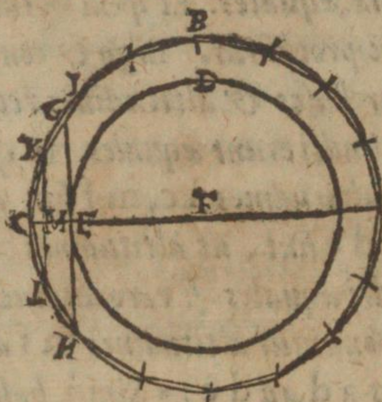
7 V.
14. XI.
10. XII.
9. V.

pli cylindri reciprocantur propter easdem bases, & altitudines reciprocas, ex quibus cùm cylindri concludantur æquales, æquales etiam erunt ipsorum partes tertiæ vel coni.

PROPOS: XVI.

Problema 1.

Duobus circulis *abc, de*, circa idem centrum *f* existentibus, in majori circulo *abc*, polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum *de*.



Extendatur per f centrũ diameter a c, *qui secet circulum* d e *in* e, *per quod punctũ ducatur perpendicularis ipsi* a c, *quæ* α *tangens erit circuli* d e. *Quoniam arcus* a g c *major est*

α 13.III.

arcu g c *subtracto dimidio* a b *& ex residuo* b c, *dimidio* b i, *& ex residuo* i c *dimidio* i k, β *relinquitur* c k *minor quàm* g c: *eritq́ʒ* c k *subtensa ipsi* c k *arcui latus polygoni inscribẽdi. Si enim arcus* b i *in partes numero & magnitudine æquales ipsius* c i *dividatur, & quadrans* a b *in æquales par-*

β I. X.

tibus

tibus b c quadrantis, & a hc semicirculus in æquales semicirculi a b c partibus, quibus arcubus subtensæ lineæ omnes erunt γ æquales rectæ c k: & sic polygonum æquilaterum erit perfectum, quod minorem circulum d e non tangit. Demissâ perpendiculari k l per k in a c, quàm secat in m. Quoniam anguli g e m, k m e sunt recti: δ erunt g h, k l, parallelelæ. Quare cum g h tangat circulum g e in e erit k l tota extra illum circulum, cumq; nunquam attinget, quia nunquam cum recta g h convenire potest. Ideoq; multò minus k longiùs ab eodem circulo remota tanget illum circulum. Proinde nec reliquorum polygoni laterum ullum huic c k æqualium, æqualiter quippe à centro f distantium, circulum d e ε continget.

γ 29. III.
δ 28. I.
ε 14. III.

PROPOS: XVII.

Problema 2.

Duabus sphæris *a b c d*, *e f g h*, circa idem centrum *i* existentibus, in majori sphæra *a b c d*, solidum polyedrū inscribere, quod non tangat minores *e f g h*, sphæræ superficiem.

Ambæ sphæræ secentur plano aliquo per centrum, sintq; cõmunes sectiones factæ in sphæris plana a b c d, e f g h, *quæ circuli sunt ex definitione sphæræ, idem habentes centrum* i *cum ipsis sphæris. In his circulis ducantur diametri* a c, & b d *in centro* i *ad angulos rectos se secantes,*

ut sint quadrantes a b, b c, c d, d a. *Posteà in*
α 16. XII. *majori circulo* α *inscribatur polygonum nō tangens*
β cor. 16. III. *minorem, quod pro demonstrationis facilitate ita*
fiat. Ex g *ad* e g *ducatur perpendicularis* g γ *usq;*
γ 1. IV. *ad circumferentiā circuli* abcd *quæ circulū* efgh β
δ 19. I. *tangit in* g: *cui* g γ *æqualis applicetur* ac *in circulo*
a b c d, *quia verò si arcui;* c γ *intelligatur sub-*
tendi recta, ut fiat triangulum g c γ, *est* c γ *la-*
tus majori ceu recto angulo oppositum majus latere
g γ. ε *erit & ipso* ac. *Abscindatur ergò* c δ *arcus æ-*
qualis ipsi ae, *si jam ex quadrante* c d *auferatur*
ε 28. III. *dimidium* d l *& ex reliquo* c l *dimidium* l k, *& sic*
ζ 1. X. *deinceps, relinquetur* ζ *tandem arcus minor arcu*
κ 29. III. c δ, *seu arcu* a e. *Sit ergò arcus* c k *minor arcu*
c δ, *seu arcu* a e. *Sit ergò arcus* ck *minor arcu* c δ;
erit

erit etiam ck *subtensa minor rectâ* ae, *id est*, gγ, *&* ck *erit inscribendi polygoni latus.* *Nam cum recta* cδ *arcum subtendens minorem arcu* cγ, *non* λ *tangat circulum* efgh; *multò minus* ck *arcum* cδ *minorem subtendens eundem circulum tanget.* *Rursus ducta diametro* kn, *erigatur ex centro* i *perpendicularis* io, *ad plana circulorum* abcd, efgh, *occurrens superficiei sphæræ majoris in* o, *&* *per rectas* oi, ac, *&* oi, kn *ducantur plana, quæ ad circulum* abcd μ *erunt recta, efficientq; communes sectiones circulos, quorum semicirculi sunt* aoc, nok. *Quia verò anguli* oic, oik *sunt* ζ *recti;* ξ *erunt* oc, oki *quadrantes, & quidem, quia* aoc, nok, *circuli æquales sunt ipsi* abcd, *propter æquales diametros: erunt ipsi* cd, oc, ok, *æquales quadrantes.* *Si ergò* dl *arcus dividatur in tot partes, in quot divisus est* cl; *& quadrantes* oc, ok *in partes numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis* cd: π *erunt illis omnibus subtensæ rectæ* ck, kl, lm, md; cp, pq, qr, ro, rs, st, tu, uo *æquales.* *Cōjunctis autē rectis* ps qt, ru, *demittantur ex* p *&* s *ad planum circuli* abcd *perpendiculares* px, sy, *quæ in communes sectiones* ac, nk, ο *cadent, eruntq; inter se* ϖ *parallelæ.* *Quoniam ergò triangulorum* pcx, sky *anguli* x *&* y *sunt* γ *recti, angulique* pcx, sky, ς *æquales, quod peripheriæ* aop, nos; *quibus insistunt, æquales sint.* *Erunt ergò propter illos angulos*

μ 18. XI.
ζ 3. def. XI.
ξ 22. III.
ο 38. XI.
ϖ 6. XI.
ρ 27. III.
σ 26. I.

gulos æquales & latera p c, s k *æqualia. etiam re-*
liqua latera reliquis æqualia. Cum itaq; æquales
t 33. I. *sint* p x, s y *& parallelæ erunt* t *& ipsas conne-*
v 2. VI. *ctentes* p s, x y, *æquales & parallelæ.* v *Sed quia*
φ 9. XI. *etiam* c k, x y, *sunt parallelæ, propter latera* i c,
χ 7. XI. i k; *proportionaliter secta erunt* φ *&* p s, c k *pa-*
rallelæ, & has connectentes c p, k s *in eodem cum*
ipsis plano erunt χ *& totum quadrilaterum* c k
s p *in uno plano erit. Si ex* q *&* t *demittantur*
perpendiculares in planum a b c d, *connectanturq;*
rectæ q c, t k, *quas similiter parallelas, ipsasq;* p s,
q t, *tanquam eidem* c k *parallelas, inter se pa-*
rallelas, totumq; quadrilaterum p s t q *in uno*
plano esse ostenderemus; sicut & quadrilaterum

qtur.

qtur & triangulum ψruo. *Quæ ipsa constructio si & super reliqua latera* kl, lm, md, *dictis* ψ 2. XI.
videlicet quadrantibus, ol, om, od *exhibeatur, nec non & in reliquis quadrantibus & reliquo hæmisphærio, ut tota sphæra major quadrilateris & triangulis repleatur similibus & æqualibus modo prædictis super latus* ck *inter quadrantes* oc, ok *constructis, inscriptum erit in majori sphæra solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Dico hoc sphæram minorem* efgh *non tangere, ducatur* iγ. *Quoniam igitur ex constructione* ck α *est minor* γ *recta* cγ: *est enim* ck *major, quam* α 19. I.
cz *quod angulus* czk *est* α *obtusus, multò major erit* α per schol. *quam* cz *& quadratum rectæ* gγ *majus quadrato* zc. sequens.
Quoniam verò quadratum iγβ *æquale est quadratis rectarum* ig, gγ, *& quadratum* ic, *quadratis* iz zc: *sunt autem æqualia quadrata* iγ, ic, *æqualia* β 47. I.
ergò sunt etiam ig, γg, *ipsis* iz, zc: *demptoque illinc quadrato* gγ, *& hinc quadrato* zc, *relinquetur quadratum* ig *minus quadrato* iz; *rectaque* ig *minor recta* iz. *Quocirca cùm* ig *sit sphæræ minoris* efgh *semidiameter, existet punctum* z, *extra eandem sphæram, ipsumque planum* cksp, *sphæram* efgh *minimè tanget quod & reliqua omnia ipsius puncta longiùs absint à sphæra illa quàm* z. *Ducatur rursus ex* i *ad planum* pstq, *perpendicularis* iβ; *erit* β *centrum circuli circa* pstq, *descripti, connexisque* βp, ip, *cum angulus* iβp, *sit* γ *rectus. Erit quadratum* ip *æquale quadratis* iβ, βp.

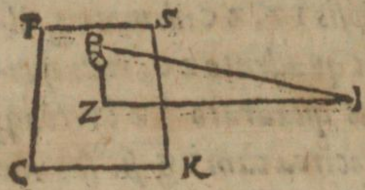
Quia verò & quadratum i c *æquale quadrato* i p *æquale est quadratis* i z, z c: *Est autem quadratum* z c *majus quadrato* β p, *quod & linea* z c *major sit, quam linea* β p. *Reliquum ergò quadratum rectæ* i β *majus est quàm* i z: *adeoq; multò magis punctum* β *extra sphæram* e f g h, *existet, quàm* z: *multoq; minus planum* p s t q *quàm* c k s p, *tanget sphæram* e f g h. *Eodemq; modo demonstratur, nullum reliquorum planorum attingere posse sphæram* e f g h. *Quod erat faciendum.*

Scholium.



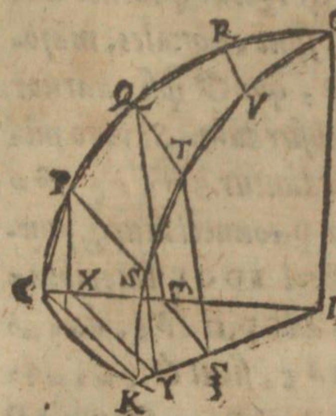
In quadrilatero c k s p *ponebatur angulus* c z k *obtusus, quod ita probatur: Circumscripto circulo circa illud, quadrilaterum,* α *cum sit, ut* i k *ad* k c, *ita* i y *ad* y x: y k *autem* β *major sit quā* i y; *major etiam erit* k c, *quàm* y x, *id est, quàm* s p. *Quare cum æqualibus arcubus subtensæ* s k. p c *ipsi* k c *sint æquales,* γ *erunt arcus illi singuli majores quadrante, ipseq; angulus* c z k δ *obtusus. Deinde etiam sumptum est, omnia alia puncta quadrilateri* c k s p *longius abesse, quàm* z, *quod patet. Punctū enim quodcunq;* θ *connectatur cum* i, *que-*

α 4. VI.
β 14. V.
γ 28. III.
δ 13. III.



quoniam i z θ est rectus. ζ Erit ipsi oppositum latus iθ majus latere i z, & sic θ remotius i z. ε3. def. XI. ζ 19. I.

Deniq; probabitur, quomodo recta z c major sit recta β p; si tamen prius fuerit ostensum, p s esse majorem recta q t. Opus autem est nobis hic figuræ superioris parte intra semidiametros i c, i o contenta, & quadrantibus o c, o k; demissioneq; perpendicularium ε μ, τ ξ quæ ad communes circulorum sectiones i c, i k η cadunt, ac parallelæ θ sunt, quas æquales & parallelæ q t & μ ξ connectunt. Quæ μ ξ cum κ sit parallela ipsi c k, quia i c & i k latera similiter per μ ξ sunt secta, etiam parallela λ erit x y. μ Erit itaq; ut i y ad y x, ita i ξ, ad ξ μ, & sit y x vel s p. m[aj]or quam ξ μ vel q t. η 38. XI. θ 6. XI. κ 2. VI. λ 30. I. μ cor. 4. VI.







Hoc ostenso ex centris z, β, circa quadrilatera c k s p. p s t q describantur circuli cum semidiametris. Si z c n[o]n credatur major quàm β p, erit vel æqualis, vel minor. Si æqualis, cum lateribus c k, z c ponantur æqualia latera β s. β p, & basis k c major quàm s p; ν erit angulus k z c major angulo s β p. Eo- ν 25. I.

 demq;

b 22. I. demq; modo s z p. major est angulo β q. Sed propter bases s k, p c, t s, q p æquales, & æquales sunt
a cor. 15. I. anguli k z s, c z p, s β t, p β q. Igitur quatuor anguli ad z, qui quatuor rectis sunt a æquales, majores sunt angulis quatuor ad β, qui & ipsi quatuor rectis a æquales sunt. Quod absurdum. Si verò mi-
a 14. V. nor sit z c quàm β p, abscindantur β ϖ, β ϱ, β ω β φ æquales ipsis z c, z k, z s, z p, connectanturq; puncta ϖ, ϱ, ω φ lineis quadrilateri s p q t lateribus a parallelis. a Erit itaq; ut β s ad s p, ita β ϱ, ad ϱ ϖ: & ϖ nimirum ϖ minor quàm β ϱ, sicut & ϱ ω, ω φ, φ ϱ minores sunt quàm s t, t q, q p. At cum s p sit minor, quàm c k; & s t, p q, æquales rectis k s, c p; t q & minor, quàm p s: erunt rectæ ϱ ϖ, ϖ ω, ω φ, φ ϱ minores rectis c k, k s, s p, p c; sed propter β ϖ, β ω, β ϱ, β φ æquales positas ipsis z c, z k, z s, z p, anguli ad z a majores angulis ad β, quibus tamē a æquales sunt. Itaq; nec β p ipsâ z c minor erit; & quia nec æquales sunt. Proinde z c major erit quàm β p. Quod erat propositum.

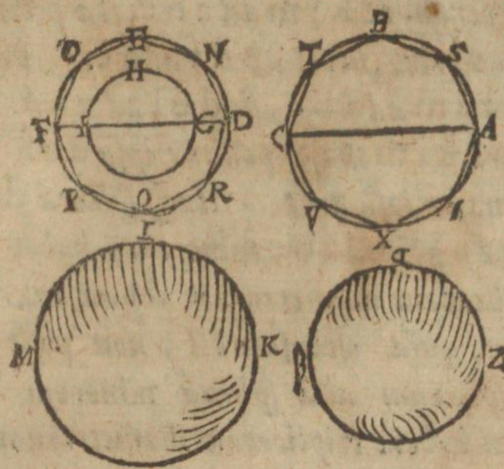
PROPOSITIO XVIII.

Theorema 16.

Sphæræ sunt *a b c*, *d e f* in triplicata ratione suarum diametrorum. *a c*, *d f*.

Sin minus, erit sphæræ a b c ratio eadē, ad aliam vel

majorem



majorē vel minorem ſphæram. Primū ergò habeat rationē triplicatā a c *ad* d f*; ſphæra* a b c, *ad ſphæram* g h i *minorem ſphærâ* d e f. α *Inſcribatur autē* α 17. XII.
in majori ſphæra d c f *polyedrum* d n e o f p q r, *non tangens minorem* g h i, *atq; huic ſimile* a b c, *ſphæræ* a s b t c u x y; *quæ cū ſint* β *in triplicata ratione* a c *ad* d f; *ſicut ſphæræ* a b c, g h i : *erit,* β coroll. 17. XII.
ut a b c, *ad* g h i, *ita polyedrum ad polyedrum. Itaq; cum ſphæra* a b c *ſit major polyedro ſibi inſcripto,* γ *erit & g h i ſphæra major altero polyedro,* d n e o f p q r, *pars toto. Quod abſurdum, non ergò major* γ 14. V.
ſphæra a b c, *ad minorem* g h i, *ipsâ* d e f *habet rationem triplicatam diametrorum* a c *ad* d f. *Habeat porrò rationem hanc ad quandam majorem* k l m, *ipſa* d e f. *Rurſus eſt, ut polyedrum,* a s b t c u x y *ad polyedrum* d n e o f p q r, *sid eſt, ut* a c *ad* d f, *ita ſphæra* a b c *ad ſphærā* k l m :

& convertendo, ut klm *ad* abc, *ita polyedrum posterius ad prius, id est,* β d f *ad* a c. *Ponatur autem ut* klm *ad* abc, *sic* def *ad* z α β. *Quia ergò sphæra* klm *major ponitur ipsa* def. *Erit &* abc *major ipsa* z α β. *Itaq; sphæra* def *ad sphæram* z α β, *ipsâ* abc *minorem, habet rationem triplicatam diametrorum* df *ad* ac. *Quod absurdum, quia ostensum est, non posse sphæram ad sphæram aliâ sphærâ minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Cùm ergò sphæra* abc, *neq; ad minorem neq; ad majorem sphæram, ipsâ* def, *habeat rationem triplicatam diametrorum* ac *ad* df: *habet itaq; ad ipsam* def. *Et sic sphæra quævis ad quamvis triplicatam diametrorum rationem habet. Hinc fit*: sphæras esse inter se, ut in ipsis similia polyedra descripta *propter proportionem eandem triplicatam diametrorum.*



ELE-



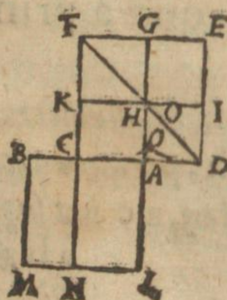
ELEMENTORUM EUCLIDIS, LIBER XIII.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.



Si linea recta *a b* secundum extremam & mediam rationē *a* secentur in *c*: majus segmentum assumens dimidiam totius, quintuplum potest ejus, quod à dimidia totius describitur quadrati. a 1 c.II. vel 30. VI.



Super c d *fiat quadratum* c e, *in quo ducta diametro* d f, *ducatur* a g *ipsi* d e *parallela, secans diametrum in* h *puncto per quod ducatur* i k *parallela ipsi* c d *Deinde super* a b *perficiatur quadra-*

dratum a m *pertrahaturq́;* f c *ad* n. β *Erunt* a i,
β cor. 4. II. k g *quadrata rectarum* a d, a c. γ *Quia ergò est.*
γ 3 def. VI. *ut* a b *ad* a c, *ita* a c *ad* c b: δ *erit re-*
δ 17. VI. *ctangulum* c m *sub extremis æquale ipsi* k g *qua-*
drato mediæ a c. *Cumq́;* a b, *id est*, a l *ponatur du-*
ε 1. VI. *pla ipsius* a d, *id est*, a h; *& sit* ε, *ut* a l *ad* a h, *ita*
rectangulum a n *ad* a k: *erit* a n, *ipsius*
a k *duplum. Quia verò* a k *&* i g *sunt* ζ *æqualia*,
ζ 43. I. *erit* a n *æquale duobus* a k, i g. *Ideoq́; additis æ-*
qualibus, c m, k g *erit quadratum* a m, *æquale*
gnomoni o p q. *Quare cum quadratum* a m *sit*
κ Schol. 4. II. *quadruplum* κ a i, *quia* a b *est dupla ipsius* a d: *Erit*
etiam gnomon o p q, *quadruplus ejusdem quadra-*
ti: additoq́; quadrato a i, *erit quadratum* d f *quin-*
tuplum quadrati.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si recta linea *d c* sui ipsius segmenti *d a* quintuplũ possit; duplæ *a b* prædicti *d a*, segmenti extrema & media ratione sectæ in *c*; majus segmentum *a c* reliqua pars est ejus, quæ à principio, rectæ.

Super d c *fiat quadratum* d f. *& diametrum* d f *secet* a g *parallela ipsi* c f *in* h, *per quod ducatur* i k *parallela ipsi* d c, *productaq́;* a c *fiat super*

a b *du-*



a b *dupla ipsius* d a *quadratum* a m, *& continuetur* c f *in* n. *Erunt* α *ergò* a i, k g *quadrata rectarum* d a, a c. *Quia autem quintuplum ponitur quadratum* c e *quadrati* a i; *relinquitur gnomon* o p q *quadruplus ejusdem quadrati* a i. *Sed &* a m *quadratum est quadruplum ejusdem quadrati* a i. *Quia* a b *est dupla ipsius* d a. *Sunt igitur gnomon* o p q *& quadratum* a m *æqualia. Rursus, quoniam* a b, *id est*, a l, *ponitur ipsius* d a, *id est*, a h, *dupla; &* β *est, ut* l a *ad* a h; *ita rectangula* l c *ad* a k. *Erit quoq; illud hujus duplum, & sic æqualibus* a k, h e, *rectangulis simul æquale* l c, *& reliquum rectangulũ* c m *reliquo quadrato* k g. *Cumq; sint tres rectæ* a b, a c, c b: *& rectangulũ* c m *sub* a b, c b *sit æquale quadrato rectæ* a c δ *erit, ut* a b *ad* a c, *ita* a c *ad* c b. *Secta itaq; est* a b *extrema & media ratione in* c, *estq; majus segmentum* a c.

α cor. 4. II.

β 1. VI.

γ 43. I.

δ 17. VI.

PROPOS: III.

Theorema 3.

Si recta linea *ab*, secundum mediam & extremam rationem secetur in *c*; minus segmentũ *cb* assumens dimidiã *cd* majoris segmenti *ac*, quintuplũ potest ejus, quod à dimidia majoris segmenti describitur quadrati.

Quoni-

Quoniam a c *est bisecta in* d, *eiq;* *addita* c b; *erit* ª *rectangulum sub*
a 6.II. a b, b c, *una cum quadrato rectæ* c d, *æquale* *quadrato rectæ* b d. *Sed rectangulum sub* a b, b c *est quadruplum quadrati* c d, *quia intermedia quadratum* a c, *huic æquale, est quadruplum quadrati ejusdem* c d. *Idem ergò rectangulum sub* a b : b c *una cum quadrato* c d, *est quintuplum quadrati* c d. *Ideoq; & quadratum rectæ* b d, *segmenti minoris cum dimidio majoris quintuplum est ejusdem* c d *quadrati.*

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Si recta linea *a b*, secundum mediam & extremam rationem secetur in *c*: quod à tota *a b*, quodq; à minore segmento *c b* simul, utraq; quadrata *a b*, *c b* tripla sunt ejus quod à majore segmento *ac* describitur quadrati.



Quia enim rectangulum sub a b, b c ª *æquale est quadra-*
a 17.VI. *to* a c; *& illud rectangulum*
b 7.II. *bis, cum quadrato* a c, *triplũ est quadrati* a c: *erunt & bis* ᵇ *æqualia quadrata* a b, b c *tripla ejusdem quadrati* a c.

PRO-

PROPOS: V.

Theorema 5.

Si recta linea *a b*, secundum mediã & extremam rationem secetur in *c*; apponaturq; ei *d a* æqualis majori *a c* segmento: tota recta linea *bd* secundum mediam & extremam rationẽ secatur, & majus segmentum est, quæ à principio recta linea *a b*.

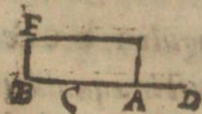


Quia enim est, ut ab *ad* ac, *vel* a d, *ita* a c *ad* c b: *etiam convertendo est, ut* da *ad* a b, *ita* b c *ad* c a: *& componendo, ut* d b, *ad* a b, *ita* a b, *ad* c a, *vel ad* d a. *secta itaq; est* b d *in* a, *extrema & media ratione.*

PROPOS: VI.

Theorema 6.

Si recta linea *ab* Rationalis extremâ ac media ratione secetur in *c*, utrumq; segmentorũ *a c*, *c b* irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.



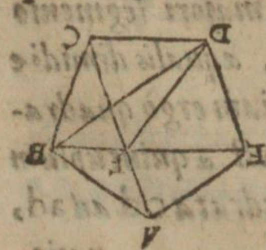
Addatur majori segmento a c, *recta* a d, *æqualis dimidiæ totius* ab. *Quoniam ergò quadratum rectæ* c d, *est* a *quintuplum* a 1. XIII. *quadrati rectæ* a d; *habebunt quadrata* c d *ad* a d,

rationem, quam numerus ad numerum: β eruntq; inter se commensurabilia: ipsæq; rectæ c d. a d commensurabiles saltem potentia. Sed a d dimidia Rationalis a b, est Rationalis. Ergò & c d.
β 6. X.
Quia verò quadrata c d. a d non γ habent rationem, quam numerus quadratus, ad quadratum, cum sit quinarij ad unitatem; δ erunt c d, a d rectæ longitudine incommensurabiles, ac proinde rationales potentia solùm commensurabiles. Quare, si ex Rationali c d detrahatur a d rationalis potentia solùm commensurabilis; ε erit reliqua a c Irrationalis, quæ vocatur Apotome. Rursus, applicato ad a b rectangulo a e, contento sub a b, c b: cum sit, ut a b ad a c; Sic a c ad c b: erit hoc rectangulum a e æquale quadrato rectæ a c. Quare quadratū Apotomæ a c, i. e. rectang. a e applicatum ad a b Rationalē ζ facit alterum latus b e, vel huic æquale segmentū minus c b Apotomen primā.
γ 24. VIII. δ 9. X. ε 74. X. ζ 98. X.

PROPOS: VII.

Theorema 7.

Si pentagoni *ab c d e* æquilateri, tres anguli *a b c* sive qui deinceps, sive qui non deinceps sint, æquales fuerint: æquiangulum erit ipsum pentagonū.



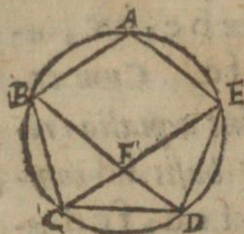
Primò sint tres anguli a, b, c *deinceps. Angulis dictis æqualibus subtendatur rectæ* b e, a c, b d; *atq; ex* f *intersectione illarum* duca-

ducatur recta f d. Iam in triangulis a b e & c b d, æqualium laterum, ex hypothesi a b, a e ipsis b c, c d: & anguli contenti æqualis a ipsi c: erunt & bases b e, b d; & anguli a e b, c d b, α æquales. α 4. I.
Sed propter b e, b d æquales, etiam anguli b e d, b d e sunt β æquales. Igitur toti a e d, c d e sunt β 5. I.
æquales: Eodem modo in triangulis a b e, a b c, fiunt æquales bases be, a c: α Et anguli a be, aeb, æquales angulis b a c, b c a. Itaq; cum anguli b a c & a b e, trianguli b f a, sint æquales: erunt & b f, f a æquales γ: quæ demtæ ex b e, a c, æ- γ 6. I.
qualibus, relinquunt æquales f e, f c. Cum ergo trianguli f e d latera f e, e d sint æqualia trianguli f c d lateribus f c, c d; & basis f d com- δ 8. I.
munis: δ erunt & anguli contenti f e d, f c d æquales. Ideoq; a e d, b c d, quadrati sunt æquales. Adeoq; cum ipsi b c d, ponantur æquales b a e & a b c: ipsiq; a e d ostensus etiam sit æqualis c d e: erunt omnes quinq; æquales & pentagonum æquilaterum. Deinde tres anguli a, c, d, sint non deinceps. Rursus ergo in triangulis b a c, b c d, α fiunt bases b e, b d & anguli a e b, c d b, æquales. Sunt autem & b e d & b d e β æquales. Igitur toti a e d, c d e sunt æquales: & sic tres d, e, a, sunt deinceps æquales. Ideoq; ut prius Pentagonum æquilaterum.

PROPOSITIO VIII.

Theorema 8.

Si pentagoni *abcde* æquilateri & æquianguli duos *c,d* angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ *db, ce*; hæ media & extrema ratione se mutuò secant, & majora ipsarum segmenta *fb, fe*, æqualia sunt pentagoni lateri.



α 14. IV. β 28. III. *Descripto* α *circulo circa pentagonum.* β *Erunt quoq; arcus* ab, bc, cd, de, ea *æquales. In triangulis autem* cdb, *&* dce *propter æqualia latera* bc, cd, de; *& æquales contentos angulos* c, d, *æquales sunt bases* bc, de, *& anguli* cdb, ecd: *quibus cum sit externus* bfc,

γ 32. I. *æqualis* γ: *Erit etiam anguli* dce *duplus: Sicut & bce, propter duplum arcum* bae, *ejusdem* d

δ 33. VI. ce δ *duplus est. Ideoq;* bfc, *&* bcf *erunt æqua-*

ε 6. I. *les rectæq;* bf, bc ε *æquales, id est, latus pentagoni* bc *æquale est segmento majori* bf, *subtensæ* bd. *Sunt autem & anguli* cbd, *anguli* cdb, *æqua-*

ζ 27. III. *libus peripheriis* bc, cd *insistentes* ζ *æquales. Proinde triangula* bcd, cfd, *propter angulos* cdb, cbd *æquales, ipsis* fcd, *&* fdc, *erunt* γ *æqui-*

η 40. VI. *angula. Eritq;* η *ut* bd *ad* dc, *id est*, bf: *ita* dc,

d c, *id est*, b f, *ad* f d. *Ideoq;* b d *in* f *secta est extrema & mediâ ratione. Eodem modo &* e c *in* f *eadem ratione secta esse ostenderetur.*

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Si hexagoni latus *b e*, & decagoni *ab*, in eodem circulo *a b c* descriptorum, componantur: tota recta linea *a e* extrema ac media ratione secatur, & majus ejus segmentum est hexagoni latus *b e*.



Ex a *per centrum* d *ducatur diameter* a c, *& conjungantur rectæ* d b, d e. *Quoniam igitur* ab *arcus est decima pars circuli: Semicirculus* ac *continebit eum quinquies, eritq;* b c *quadruplus ipsius* a b: α *angulusq;* b dc *quadruplus anguli* b d a. *Rursus in triangulo* d b e *æqualium laterum* d b, b e; β *erunt* b d e, *&* e *æquales, quibus æqualis* γ *externus* d b a, *duplus erit ipsius* e: *Sicut &* d b a *æqualis* β bad. *Et sic ambo simul quadrupli anguli* e: *adeoq; bis* γ *æqualis externus* b d c *ejusdem* e *quadruplus. Qui cum & anguli* a d b *fuerit quadruplus: erunt* e *&* a d b *æquales. Et sic propter angulos* e *&* a *æquales ipsis* b d a, *&* a, *triangula* a e d, *&* a d b, *æquiangula.*

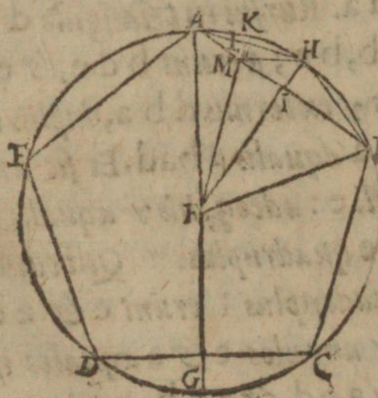
α 33. VI.
β 5. I.
γ 32. I.
δ 42. I.

Erit igitur, ut a e *ad* a d, *id est*, e b; *Ita* a d, *vel* e b, *ad* a b. *Secta nimirum est* a e *secundum extremam & mediam rationem, cujus segmentum majus est latus hexagoni. Hinc patet, cum per quintam hujus detractum minus segmentum ex majore, relinquat majus segmentum, divisum secundum extremam & mediam rationem, quod subtracto latere decagoni ex hexagoni latere fiat decagoni latus segmentum majus lateris hexagoni, media & extremâ ratione secti.*

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si in circulo *a b c d e*, pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus *ab*, potest & latus hexagoni & latus decagoni in eodem circulo descriptorum.



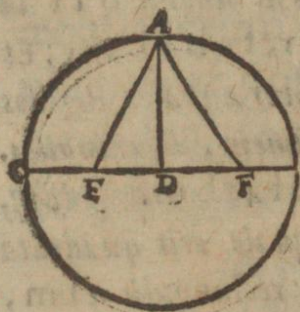
Ducatur diameter a g *& semidiameter* f b, *& bisecto arcu* a b *in* h; *erit* a h *latus decagoni, &* b f *hexagoni. Rursumq; bisecto arcu* a h, *in* k: *Ducatur* f k *secans* a h,

a h, in l; & b a, in m: jungatur h m. Propter arcus ergo a h, b h, α æquales erunt anguli insistentes a f h, h f b. Et sic in triangulis b f i, a f i, propter æqualia latera a f, f b; & f i commune æquales β sunt bases b i, b a; & anguli b i f, a i f, id est, recti, sicut & l a, l h sunt æquales, angulique f l a, & f l h, γ recti. Si jam ex semicirculis a b c g, & a e d g auferantur æquales arcus a b c, a e d; relinquuntur c g, g d æquales inter se: Et sic æquales ipsis b h, a h. Quorum b h, cum sit duplus arcus h k; ejusdem duplus erit c g. Eodemque modo, ut a b, ita & b c duplus est arcus b h. Quare arcus c g, b c, sunt æquemultiplices arcuum h k, b h, dupli: γ adeoque totus b g duplus totius b k: angulusque b f g δ duplus anguli b f k. Cumque idem b f g ad centrum duplus sit anguli b a f ad peripheriam: erunt ergo b f m, f a b æquales; Et triangula b a f, b f m, propter æquales angulos b a f, b f m, & a b f communem, æquiangula. η Quocirca ut a b ad b f: ita b f ad b m. Ideoque rectangulum sub a b, b m, æquale erit quadrato recti b f. Rursus in triangulis rectangulis a l m, & h l m, propter latera æqualia a l, l h, & l m commune, β æquales fiunt bases m a, m h, & anguli l a m, l h m: sed l a m est ipsi h b a, æqualis. Igitur & l h m. ζ Ideoque triangula a h b, & a m h sunt æquiangula.

α 27. III.
β 4. I.
γ 1. V.
δ 33. VI.
ε 20. III.
ζ 32. I.
η 4. VI.

Quamobrem [c], *ut* a b *ad* a h, *ita* a h *ad* h m. *Et sic sub* a b, a m, *contentum rectangulum æquale*
d 4 VI. [d] *quadrato* a h. *Sed sub* a b, b m *est ostensum æ-*
e 17 VI. *quale quadrato* b f. *Itaq; rectangula sub* a b, b m,
a 5. I. *&* a b, a m *æqualia sunt quadratis* b f, a h *simul.* *Sed illa duo rectangula sub* a b, b m *&*
a 2. II. a b, a m *sunt* [a] *æqualia quadrato* a b. *Aequale ergò est quadratum* a b, *quadratis* b f, a h, *laterum Hexagoni & decagoni. Hinc patet primò, quod* linea ex centro bisecans arcum, ejus quoq; subtensam bisecet. *Secundò quod* diameter circuli ex uno angulorum pentagoni latus ipsi oppositum bifariam secet.

Scholium.



Ex Ptolemæo usitata est praxis, qua unâ eademq; opera in dato circulo & pentagonum & decagonum describantur. Ejus demonstratio hæc est. In circulo a b c, *super diametro* b c *erigatur perpendicularis ex centro*, d a, *&* d c *bifariam secta in* e *ducatur* e a: *ipsiq; æqualis abscindatur* e f; *& ducatur* f a. [a] *Erit* f a *latus pentago-*
a 4. II. *ni &* f d *decagoni. Quia enim* d c *bisecta est in* e, *ipsiq; adjecta* d f; [a] *erit rectangulum sub* c f, d f, *unà, cum quadrato* d e, *æquale quadrato rectæ* e f

vel

vel ea. $^{\beta}$ Quod æquale est quadratis rectarũ cd, da. Dempto itaq; quadrato cõmuni de: relinquitur rectangulũ sub cf, df, æquale quadrato rectæ ad, idest, quadrato cd. $^{\gamma}$ Erit igitur, ut cf ad cd; ita cd ad df, & sic cf divisa est secundùm extremam & mediam rationem in d. Cum igitur illius segmẽtum majus cd sit latus $^{\delta}$ hexagoni: $^{\epsilon}$ erit df latus decagoni ejusdem circuli. Rursus quoniam quadratum fa æquale est quadratis laterum hexagoni ad, & pentagoni df, $^{\zeta}$ erit fa latus pentagoni.

β 47. I.
γ 17. VI.
δ 15. IV.
ε 9. III.
ζ 10. XIII.

PROPOSITIO XI.

Theorema 11.

Si in circulo *abcde* Rationalem habente diametrum *ag*, pentagonum *abcde*, æquilaterum describatur: Pentagoni latus *ab* latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.



Per centrum f *ducantur diametri* a g, b h: *quorum* a g *secet* c d *latus in* i: *connectanturq;* a c, a h; *Quarũ* a b *secet diametrum* b h *in* k. *Abscindatur quoq; ex semidiametro* f h *quarta ipsius pars* f l; *itemq; ex recta* a c *quarta ejus pars* c m. *Quoniam igitur diameter*

meter b h *Rationalis est; erunt & ipsius aliquotæ partes* bf, fl *rationales. Totaq;* bl *utriq; cõmensurabilis,* α *Rationalis. Rursus, quia* fb *ex centro secat arcum* a c *bifariam in* b; *ergò* β *& ipsius subtensam* ac *in* k, *& ad angulos rectos. Sicut &* a g *ipsam* c d *in* i. *Atq; ita triangula* a c i, a f k, *rectangula, propter communem angulum* a *fiunt æquiangula* γ: δ *eritq;, ut* c i *ad* c a; *ita* f k *ad* f a: *& permutando, ut* c i *ad* f k; *ita* c a *ad* f a. *Ut autem* c a *ad* f a, *ita* ε *est* c m, *quarta pars ipsius* c a *ad* f l, *quartam partem ipsius* f a. *Erit ergò ut* c i *ad* f k, *ita* c m *ad* f l: *& permutando ut* c i *ad* c m, *id est, harum duplæ* c d *ad* c k, *ita* f k *ad* f l: *& componendo, ut* c d c k *simul, ad* c k, *ita* f k, f l *simul, id est,* k l *ad* f l, ζ *Ideoq; erit, ut quadratum rectarum* c d, c k *simul, ad quadratum* c k; *ita quadratũ* k l *ad quadratũ* f l. *Quia verò, si* a c *secetur media & extrema ratione, ducta videlicet recta* b d, *majus ipsius segmentum* η *æquale est lateri pentagoni, ut* c d: θ *erit quadratum compositæ ex* c d *segmento majore &* c k, *dimidiæ totius, quintuplum quadrati rectæ* c k *seu dimidiæ totius. Quare & quadratum* k l *quintuplum est quadrati* f l. *Ideoq; quadrata* k l, f l κ *commensurabilia sunt, & rectæ* k l, f l *potentia saltem commensurabiles. Sed* f l *erat Rationalis. Ergò &* k l. *Deinde, quia* b l *continet quatuor partes ipsi* f l *æqua-*

α 16. X.
β cor. 10. XIII.
γ 32 I.
δ 4. VI.
ε 15. V.
ζ 22. VI.
η 8. XIII.
θ 1. XIII.
κ 6. X.
λ 20. VI.

æquales sit b l talium quinq; a habebitq; b l quadratum talium 25, qualium f l, unam propter rationem duplicatam quadratorum ad latera, & k l quinq;. Cum igitur quadrata b l, k l, non habeant rationem numerorum quadratorum: Sunt enim ut 25, ad quinque, vel quinque ad unum: μ 9. X.
μ erunt rectæ b l, k l longitudine incommensurabiles. Ideoq; cùm & Rationales; erunt Rationales potentia solùm commensurabiles. Si itaq; ex rationali b l, dematur Rationalis k l, potentia tantùm cõmensurabilis; ν Erit reliqua b k Irrationalis & Apotome, cujus congruens est k l. Iam recta b l possit plus, quàm k l, quadrato rectæ n. Quoniam quadratum b l, æquale est quadratis k l & n, sed qualium b l fuit 5. talium k l est una: Erit n reliqua talium 4; habebunt igitur quadrata b l & n proportionem numeri ad numerum. Ideoq; erunt commensurabilia, ipsæq; b l & n rectæ commensurabiles saltem potentia: Sed b l est ostensa Rationalis. Erit igitur & n rationalis. Quoniam illa b l ad n ratio, non est numerorum quadratorum. Est enim quæ quinque ad quatuor. μ Erunt b l & n longitudine incommensurabiles, ac proinde rationales potentia solùm commensurabiles. Quare cum tota b l rationalis longitudine, sit commensurabilis rationali b h: (Qualium enim b h est octo, talium b l est quinque) ν 47. X.

positâq;

posítq; plus quam congruens k l *quadrato rectæ* n *sibi longitudine incommensurabilis, erit* b k *Apotome quarta ex definitione. Deniq; quia* ab *est* ξ *media proportionalis inter* b h, b k; *Quia* b a h *est rectangulum* ο *propter angulum rectum* a, *ex quo demissa perpendiculari* a k, π *erit* a b, *quadratum æquale rectangulo sub* b h, b k. *Cum igitur superficiem sub Rationali* b h, *& Apotoma quarta* b k, *posiit recta* a b ϱ *erit* a b *Minor.*

ξ cor. 8. VI
ο 31. I V.
π 27. VI.
ϱ 95. X.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si in circulo *a b c*, triangulum æquilaterum *a bc* deſcribatur; trianguli latus *a b* potentia triplum eſt ejus lineæ *d b*, quæ ex centro circuli *d* ducitur.

α coroll. 10. XIII.



Ducta diametro a e; *secetur* α *& arcus* b c *in* e, *& subtenta* b c *in* f *bifariã, & ad angulos rectos: erit* b e, *dimidia partis tertiæ* b c, *pars sexta circuli, ipsiusq; subtensa* b e *latus hexagoni, æquale* β *semidiametro circuli. Quoniam ergo quadratum* a e γ *æquale est quadratis* a b, b e, *quod angulus* a b e *in semicirculo sit rectus* δ. *Est autem*

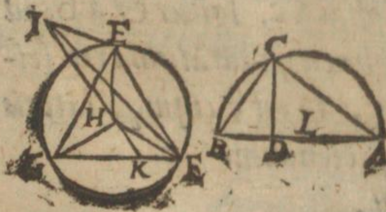
β cor. 15. IV
γ 47. I.
δ 21. III.

autem rectæ a e *quadruplum rectæ* b e *dimidiæ. Qualium itaq; partium quadrata* a b, b e *sunt quatuor, talium* b e *est una, & a b tres : adeoq; quadratum* a b *triplum quadrati* b e, *vel semidiametri* d b. *Hinc patet 1.* Diametrum circuli potentiâ esse sesquitertiam ad latus trigoni æquilateri, *quia ipsius partes sunt quatuor, qualium hujus sunt tres.* 2, Semidiametrum *de* bifariam secari in *f*, à latere trianguli *bc. Cùm enim quadratum* a b, *sit triplum ipsius* b e, *si* a b *ponatur partium 12, erit* b e *talium 4. Est autem quadratum* b e *æquale quadratis* f b, f e, *& talium partium tres habet* b f. *quia quarta pars quadrati* a b; *Vna igitur illarum est* f e; *ipsiusq; quadruplum* b e, *id est,* d e, *ac proinde* f e *dimidia est ipsius* d e. Schol. 4. II.

PROPOS: XIII.

Problema 1.

Pyramidem constituere & datâ sphæra complecti, & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.



In diametro sphæræ, ad *sit dupla ipsius* db: *ducaturq; perpendicularis* cd, *& linea* ca,

ca, cb. *Iamq; intervallo* h e, *id est,* d c *ducatur circulus* e f g, *in quo inscribatur triangulum æquilaterum* e f g. *Iunganturq;* h f, h g *æquales ipsi* d c. *super* h *erigatur perpendicularis* h i, *æqualis rectæ* a d: *& ex* i *aemittantur* i e, i f, i g. *Erit quatuor hisce triangulis comprehensum*
α 17. VI. *solidum pyramis sive Tetraedrū.* α *Quoniam enim quadratum* a d *est duplum quadrati* c d; *& qua-*
β 47. I. *dratum* c a *triplum* β *ejusdem* c d: *Ideoq; etiam*
γ 4. I. *ipsarum* i e, i f, i g *æqualium* γ *ipsi* c a *quadrata*
δ 12. XIII. *erūt* δ *tripla quadratorū* h e, h f, h g, *semidiametrorū. Erunt triangula quatuor* efg, efi, fgi, gei, *æquilatera & æquiangula, ex quibus constituta pyramis, datæ sphæræ, cujus diameter* a b *est, inscripta. Extensa enim* i h, *quæ æqualis ipsi* a d *in* k, *dum* i k *fiat æqualis ipsi* a b. *Quia inter* i h, h k *mediæ proportionales sunt* h e, h f, h g (*Sunt enim æquales ipsis* a d, d b, d c) *ejusdem sphæræ sub* i k, *id est,* a b *diametro semicirculi transibunt puncta* i, k, e, f g; *eritq; sphæræ datæ diametri* a b, *inscripta pyramis* e f g i, *ad cujus latus quodvis ipsius sphæræ diameter est sesquialtera. Cum enim*
ε 8. VI. ε *proportionales sint* a b, a c, a d; ζ *erit, ut* a b,
ζ 20. VI. *ad* a d; *ita quadratum* a b *ad quadratum* a c: *Sed* a b *est sesquialtera ipsius* a c. *Igitur &* a b, *id est, ipsius* i k *diametri sphæræ quadratum erit sesquilaterum quadrati* a c, *id est, cujusq; lateris pyramidis. Quod erat faciendum.*

Corollarium.

1. Erit

1. Erit etiam diameter sphæræ potentiâ quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basin pyramidis descripti.

Quia enim a b *est ostensa sesquialtera ipsius* a c, *idest*, e f: *Erit quadratum* e f: *talium partium 6, qualium* a b *novem. Talium autem* h e *tantum est 2, quia quadratum* e f *ipsius* h e *est triplum. Quadratum igitur* a b *9 est quadrati* a b *2, quadruplum sesquialterum.*

2. Perpendicularis ex centro *l* sphæræ ad planum basis *efg* pyramidis *efg* idemissa sexta pars erit diametri *ab* sphæræ & tertia semidiametri *al*.

Quia enim a d *4, est dupla ipsius* b d z: *erit ipsius* a b, *6*, l d, *1. pars sexta; & ipsius* a l *pars tertia. Cumq; altitudo* h i *sit ipsa* a d, *continebit hæc duas tertias diametri; & proinde quadratum diametri 9, ad altitudinē 4, exhibet ipsorum proportionem duplicatam ad 3 ad 2. Si ex materia fiant 4, triangula æquilatera quæ hunc in modum disponantur, fiet inde pyramis ut docet Durerus.*

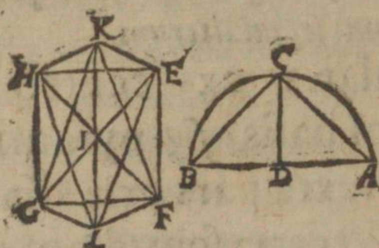


PRO-

PROPOSITIO XIV.

Problema 2.

Octaedrum constituere, & sphæra complecti; qua & pyramidem, & demonstrare quod sphæræ diameter potentiâ sit dupla lateris ipsius octaedri.



Circa diametrum a b, *datæ sphæræ, descripto semicirculo, erigatur ex centro perpendicularis* d c, *& connectantur* c a, c b α *æquales. Super* e f *æquali ipsi* a c *fiat quadratũ* e f g h, *diametris* e g, f h, *secantibus se in* i *æqualiter. Iam ad planum hoc quadratum utrinq; ex* i *erigantur perpendiculares* i k; i l *æquales ipsi* i e, *Iunganturq; puncta* k *&* l *cum* e f g h *punctis:* β *erit ex octo triangulis æqualibus & æquilateris* k e f, k f g, k g h, k e h, l f e, l e h, l h g, l f g, *factum solidum octaedrum, quod datæ, diametri* a b, *sphæræ inscriptũ est. Quia super* k l, *id est*, a b, *diametro mobilis semicirculus omnia etiã* e, f, g, h, *tanquam æqualiter à centro* i *distantia puncta transit, estq; sphæræ diameter* a b *dupla* γ *ipsius* a c, *id est*, e f *vel cujusq; lateris octaedri.*

α 4. I.

β 8. & 4. I.

γ 47. I.

Corol-

Corollaria.

1. In octaedro tres diametri *k l*, *e f*, *f h* se mutuò ad angulos rectos secant in *i* centro sphæræ. *Quia omnes ad i anguli sunt ostensi recti.*

2. Octaedrum dividitur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis est quadratum *e f g h* Et vertices *k l*, altitudinesq; *i k*, *i l*, semidiametri. *Habent enim plana similia & æqualia.*

3. Si Tetraedrum & Octaedrum eidem sphæræ inscribantur Tetraedri latus potentia sesquitertium est lateris octaedri. *Quia enim potentia diametri* a b *6 est sesquialtera* δ *lateris Tetraedri 4, & dupla,* ε *Octaedri 3. Erit potentia laterum illorum 4. ad 3. id est, sesquitertia.* δ 13. XIII. ε 14. XIII.

4. Bases octaedri oppositæ sunt parallelæ ζ. ζ 16. XI.



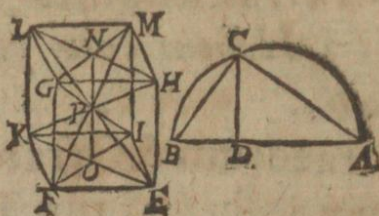
Scholium.

Durerus ex materia vult fieri, si ita inter se complicentur octo triangula.

PROPOS: XV.

Problema 3.

Cubum constituere, & sphærâ complecti, qua & priores figuras, & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.



Circa diametrum datæ sphæræ a b *descripto semicirculo auferatur ex* a b *pars tertia* d b, *&* *ex* d *erigatur perpendicularis* d c, *junctis* c a, c b. *Iam super* e f *æquali ipsi* b c, *fiat quadratum* e f g h, *ad cujus angulos 4 erigantur 4 perpendiculares rectæ* e i, f k, g l, h m, *æquales ipsi* e f, *& extrema connectantur lineis* i k, k l, l m, m i, *quæ & inter se* α *sunt æquales & parallelæ, quia æquales* β *& parallelas connectunt : & sic quadratum* e f i k: *eodemq; modo &* f k l g, g l m h,
α 43. I.
β 6. XI.
γ 24. XI. h m i e: *& proinde* γ i k l m *opposito* e f g h *simile & æquale erit quadratum. Itaq; cum* e l *pro-*
δ 15. XI. *pter latera opposita* δ *parallela sit parallelepipedū, erit etiam cubus, & quidem comprehensus sphæra.*

Opposi-

Oppositorum enim planorum e f k i, g h l m diametri sint e k, f i, g m, h l, per quæ ducantur plana e k, l h, f i, m g; quorum utrumq; cum secet Cubum, transibit utrumq; per centrum p, in quo etiam omnes cubi diametri se bifariam secant, & per idem punctum p communis planorum sectio no incedet. Quia verò plana e k, l h, f i, m g sunt rectangula, quod & h e æquè ad e k, quàm e f, ad e i perpendicularis est; & æqualia propter latera æqualia. Adeoq; diametri sibi e l, f m, h k, g i æquales; ut & semidiametri p e, p l, p h, p k, p f, p m, p g, p i. Quare ex centro p descriptus semicirculus, circa e l circumductus, describet sphæram omnes Cubi angulos attingentem. Hæc ergò e l est ipsi a b æqualis. Quia enim quadratum e k æquale est quadratis e f, f k, id est, duplum quadrati e f, vel k l: Erunt quadrata e k, k l tripla quadrati k l & sic quadratis e k, k l, æquale quadratum e l etiam est triplum quadrati k l, vel b c, cujus quadrati b c etiam triplum est quadratum a b. Cum enim a b, b c, b d, sint proportionales; erit, ut a b prima ad b d tertiam: ita quadratum a b, ad quadratum secundæ b c, id est, a b est triplum ipsius b c; sicut & e l. Erunt ergò a b, e l æqualia. Cumq; quadratum e l fuerit triplum quadrati k l, patet diametrum sphæræ potentiâ triplam esse lateris Cubi.

1.5 XI.
schol. 39. XI.
4. XI.
34. I.
47. I.

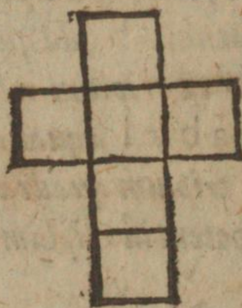
Corollaria.

1. Omnes diametri cubi inter sè sunt æquales seq; mutuo bifariam secant in centro sphæræ; eodemq; modo lineæ centra oppositorum quadratorum continentes secantur bifariam in centro.

2. Potentia diametri sphæræ seu cubi, æqualis est potentijs laterum Tetraedri & cubi simul sumptis.
α 13.XIII. *Qualium α enim partium quadratum diametri est 9, talium sex est quadratum la-*
β 15.XIII. *teris Tetraedri β taliumq; 3, quadratum lateris cubi.*

Scholium.

Ex materia aliqua in 6 quadrata æqualia in hunc modum divisa optimè fiet cubus seu figura 8 angulorum tesseræ similis.

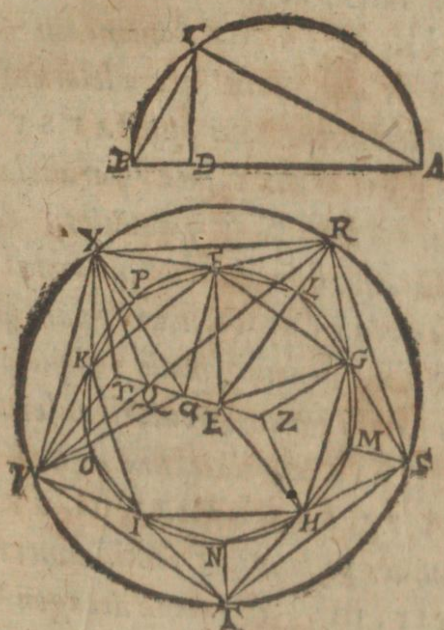


PRO-

PROPOSITIO XVI.

Problema 4.

Icoſaedrum conſtituere, & ſphæra complecti, quâ & ante dictas figuras; & demonſtrare quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.



Circa diametrum datæ ſphæræ a b *deſcripto ſemicirculo auferatur ex* a b *pars quinta* d b, *ut* ab *ipſius* b d *ſit quintupla: Ipſius* a d *verò ſeſquiquarta; &* a d *ipſius* d b *quadrupla. Ex* d *erecta perpendiculari* d c *connectantur* c a, b c. *Intervallo* e *fid eſt*, b c *deſcribatur circulus cui* a *inſcribatur* a. 11. I V.

 penta-

pentagonum æquilaterum f g h i k, divisisq; arcubus f g, g h, h i, i k, k f, bifariam in punctis, l, m, n, o, p connectantur f l, l g, g m, m h, ceu latera decagoni. Deinde ex illis punctis ad planum circuli f g h i k erigantur perpendiculares e q, l r, m s, n t, o u; p x, æquales semidiametro e f vel

β 6. XI. b c; & sic β parallelæ ipsi e q, quam cum singulis

γ 33. I. oppositæ binæ æquales & parallelæ γ connectunt

δ 6. XI. semidiametro æquales; ut sic δ plana duo opposita parallela f g h i k & r s t u x contineant quinque semidiametros æqualium parallelorum circulorum. Connectantur jam puncta r s t u x, per lineas r s, s t, t u, u x, x r, quæ β parallela sunt lineis oppositis ut r x ipsi l p, & γ æquales; æqualesq; ε in circulis æqualibus subtendunt arcus: estq;

ε 28. III, r x pars quinta circuli r s t u x sicut l p pars quinta est circuli f g h i k. Eodemq; modo reliquæ omnes etiam quintas partes eorum circulorũ auferunt & sic pentagono f g h i k æquilaterum æquale est r s t u x. Ductis r f, r g, s g, s h, t h, t i, u i, u k, x k,

ζ 47. I. x f; quæ omnes possunt ζ & semidiametros seu perpendicares l r, m s; & latera decagoni ut f l,

κ 10. XIII. l g. κ Ideoq; sunt æquales lateri pentagoni ejusdem circuli, id est, ipsi f g r x; & sic decem triangula r f x, r f g, r g s, s g h, s h t, t h i, t i u, u i k, u k x, x k f æquilatera & æqualia sunt. Iam e q perpendicularis utrinq; extendatur ut q y & e z, sint æquales lateri decagoni quæ puncta z y connectantur,

tur cum singulis angulorum pentagoni f,g,h,i,k, & r, s, t,u, x; quæ rursum omnes ζ possunt semidiametros & latera decagoni illorum circulorum. Ideoq; η & æquales sunt lateri pentagoni, ut sic fiãt utrinq; 5 triangula æquilatera & æqualia priorib. 10. Hæc ergò 20 triangula, si suis lateribus connectãtur, efficient Icosaedrum. Dico hoc ipsum comprehendi sphæra diametri a b. Divisa enim e q in α, ducantur α f, α x, α u. Quoniam latera α q, q u, trianguli α q u, æqualia sunt lateribus α q, q x trianguli α q x, cum q u, u x sint semidiametri circuli r s t u x, & anguli α q u, α q x θ recti, ζ Erunt & bases α u, α x κ æquales. Ita si ducantur α r, α s, α t, æquales ostenderentur, ipsis α u, α x. Rursum, quia trianguli α q x latera α q, q x æqualia sunt lateribus α e, e f, trianguli α e f, quia e f & q x æqualium circulorum sunt semidiametri & anguli α q x, & α e f θ recti: Erunt bases a x, a f, æquales. Quibus eodem modo æquales ostenderentur α h, α g, α i, α k. Sunt ergò omnes decem lineæ, ex α ad decem angulos f,g,h,i,k; r s,t,u, x ductæ æquales. Quia verò q e est semidiameter seu latus hexagoni & e z decagoni: λ erit q z divisa in e, secundum extremam & mediam rationem, & minus segmentum e z, assumens e α dimidium majoris, id est, α z, quintuplum μ potest quadrati e α.

θ 3. def. XI.
κ 4. I.
λ 9. XIII.
μ 3. XIII.

Poteſt autem & α f *quintuplum ejusdem quadrati* e α,*quia* e f *duplæ ipſius* e α *quadruplum, eſt quadratum ipſius* e α, *& utriusq; ſimul quintuplum ejusdem* e α. *Erunt ergò quadrata* α f, α z *æqualia; ipſæq; rectæ æquales: & cum* z y *ſecta ſit biſariam in* α, *erũt omnes rectæ ex* α, *ad omnes Icoſaedri angulos ductæ æquales, & ſphæræ illius diameter erit*

ϑ 15. V. *æqualis diametro ſphæræ* a b. *Cum n. ſit, ut* α z *ad*

ξ 22. VI. e α, *ita* y z *dupla ipſius* α z *ad* q e *duplã ipſius* α e; ξ *ejusdem rationis erunt, earũ quadrata, cumq; qua-*

ο cor. 8. IV. *dratum rectæ ſit quintuplum ipſius* e α, *erit etiam quadratum* y z *quintuplũ quadrati rectæ* q e. *id eſt,* b c, *cui poſita eſt æqualis. Sed & ejusdem quadrati* b c *quintuplum eſt quadratum* a b, ο *cum ſit, ut* a b *ad* b c, *ita* b c *ad* b d; *erit etiam, ut* a b, *ad* b d; *ita quadratum* a b *ad quadratum* b c; *adeoq; quadratum* a b, *quadrati* b c *quintuplum eſt, ſicut* a b *ipſius* b d *eſt quintupla. Ideoq; quadratis rectarum* y z, a b, *æqualibus erunt ipſæ quoque æquales; & ſphæræ circa ipſas æquales. Quia deniq; diameter ſphæræ* a b *ponitur Rationalis, & poteſt quintuplum quadrati* b c *vel* e f: *erit: &* e f *ſemidiameter circuli* f g h i k *Rationalis; cũ ſint* π,

π per 6. VI *ut numerus ad numerum 5 ad 1 & ſic commenſura-*

ρ 11. XIII. *biles ſaltem potentia: Et tota diameter ejusdem circuli Rationalis erit proptereaq; latus pentagoni, id eſt, Icoſaedri Irrationalis* ρ *erit linea vocata Minor.*

Corol.

Corollaria.

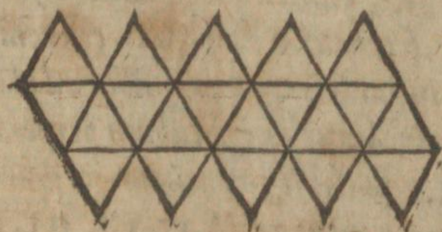
Diameter sphæræ est potẽtia quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis. *Quadratum enim* a b *quintuplum est ostensum quadrati* b c, *id est, semidiametri* e f.

2. Diameter *y z* sphæræ componitur ex latere *e q*, hexagoni & duobus lateribus *q y*, *e z* decagoni ejusdem circulis *f g h i k*.

3. Latera Icosaedri opposita *k x*, *h i*, sunt parallela. *Quia eidem* l p *sunt parallela.*

Scholium.

Si triangula 20 disponantur hoc modo, componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem.

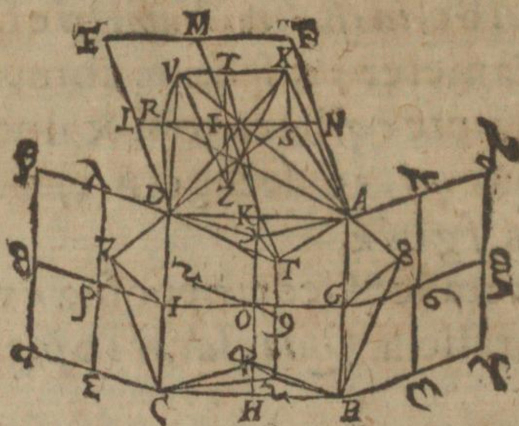


PROPOS: XVII.

Problema 5.

 Dode-

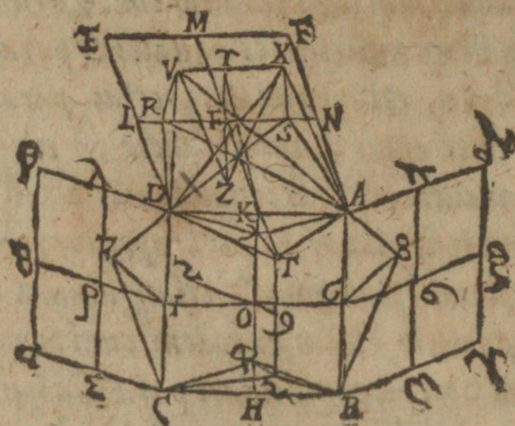
Dodecaedrum constituere & sphæra complecti, qua & prædictas figuras: & demonstrare, quod dodecaedri latus est Irrationalis linea, quæ vocatur Apotome.



Sit una basis cubi, data sphæra comprehensi, quadratum a b c d *cui aliud æquale ad angulos rectos insistat* a d e f *quorum communis sectio sit* a d. *Divisis cunctis lateribus bifariam in* g, h, i, k, l, m, n, *punctis, ijsq; connexis* a *secantibus se rectis in*
a 8. IV. *punctis* o p, *secentur* o k, p l, p n, *extremâ & media ratione in punctis* q r s *ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares* q t, r u, s x, *æquales segmentis majoribus* o q, p r, p s, *& conjungantur rectis* a t, a x, d t, d u, u x. *Erit* a t d u x, *unũ ex duodecim pentagonis æquilateris & æquiangulis dodecaedri constituendi. Esse hoc in uno plano constat. Quia cùm* r u s x, *ad quadratum*

dratum a d e f, *sint rectæ & β parellelæ & æquales* β 6. XI.
tanquam æqualium segmenta eadem : γ *Erunt et* γ 33. I.
iam r s u x *illas connectentes æquales & parallelæ.*
Et quia a d, r s, *etiam æquales rectas parallelas*
a n, d l *connectentes, sunt parallelæ ;* δ *erunt &* δ 9. XI.
a d, u x *parallelæ, & has connectentes* a x, d u, *in*
ε *eodem cum ipsis plano. Et sic* Trapezium a d u x ε 7. XI.
in uno est plano Sed quia & triangulum a t d *in*
uno est plano ; erit etiam in eodem cum trapezio.
Ductâ enim p y, *perpendiculari parallela ipsi* r u ;
connectantur k t, k y. *Quoniam est, ut* o k *ad* o q ;
Ita o q *ad* q k : *&* k p *æqualis est ipsi* o k. *Quia*
laterum cubi sunt dimidia, & p y *ipsi* o q, *id est*,
r u : *erit etiam ut* k p *ad* p y, *ita* o q, *id est*, q t,
ad q k. *Quare cum triangula* p k y, q t k *duo latera*
duobus, circum angulis conjunctis, proportionalia
habeant ; lateraq; p k, q k, *homologa* β *parellela,*
quia utrunq; est rectum ad quadratum a b c d : *&* ζ 32. VI.
p y, q k, *parallela, quia utrumq; est rectum ad* η 1. XI.
quadratum a d e f : ζ *erunt reliqua latera* k y, k t,
in eandem rectam collocata, Et η *recta* t y, *in uno*
erit plano, & sic plana a d t, *&* a d u x, *unum*
sunt planum per rectas a d, t y *ductum. Est ergò*
pentagonum a t d u x *in eodem plano. Sed & æ-*
quilaterum esse ita patet. Triangula enim re-
ctangula a n s, a k q, *duorum æqualium la-* θ 4. I.
terum a n, n s *ipsis* a k, k q ; *etiam bases* a s, a q
habent æquales θ.

Rursus



Rursus triangula rectangula a s x, a q t, duorũ æqualiũ laterum a s, s x, ipsis a q, q t, (quia s x, q t æqualium eadem sunt segmenta) etiam bases a x,
θ 4. I. a t æquales θ habent. Idemq; in triangulis d q t, d r u, ostenderetur de lateribus t d, d u, quod æqualia sint ipsi a t. Erunt ergo 4. pentagoni latera æqualia, quibus æquale etiam ostendetur
κ 4. XIII. u x. κ quadrata rectarum p n, n s, simul sunt tripla quadrati p s vel s x. Sed quadrato rectæ p n æquale est quadratum rectæ a n. Igitur & quadrata a n, n s simul sunt tripla quadrati s x; & illis æquale quadratum a s ejusdem quadrati s x triplum: & quadrata a s, s x simul quadrupla qua-
λ 47. I. drati s x: & sic eisdem æquale λ quadratum a x
μ 34. I. quadruplum quadrati s x, id est, quadrati p s μ vel s y. Sed quia duplæ ipsius x y, id est x u; Quadratum etiam est ν quadruplum. Erunt quadrata a x, x u æqualia, ipsæq; rectæ æquales; cui a x cùm & reli-

reliqua tria a t, t d du sint æqualia; Erit pentagonũ a t d u x æquilaterum. Est verò & æquiangulum. Ductis enim a r, a u, cùm p n sit in s secta media & extremâ ratione, eiq; additâ p r æqualis majori segmẽto p s; ξ erit quoq; n r secta in p extrema & media ratione, majusq; segmentum n p. Erunt ϰ igitur quadrata rectarum n r, r p. simul tripla quadrati n p, id est, a n. Est autem quadratum r u æquale quadrato r p. Ideoq; n r, r u etiam simul sunt tripla quadrati a n; & proinde quadrata n r, r u, a n, quadrupla sunt ejusdem quadrati a n. Sunt autem quadrata n r, a n æqualia quadrato a r. Igitur & a r; r u quadrupla sunt quadrati a n, & illis λ æquale quadratum a u, quadruplum rectæ a n. Cumq; ejusdẽ a n duplæ a d quadratũ sit etiã quadruplũ quadrati a n. Igitur quadrata a d, a u sunt æqualia ipsæq; rectæ æquales. Eodemq; modo d x, a d sunt æquales; & sic tres a d, a u, d x, sunt æquales. Iam in triangulis t a d, & d u x, æqualium laterum ejusdem pentagoni, & basium a d, d x; ο erunt & anguli a t d, d u x æquales. Eidemq; d u x æqualis a x u. Proinde, cùm tres pentagoni æquilateri anguli sint æquales, π erunt omnes inter se æquales. Et sic pentagonum æquilaterum & æquiangulum. Quod si sumantur alia duo cubi quadrata c α β d, b γ δ a, recta ad quadratum a b c d, quorum singula latera secentur bifariam in e, θ, λ, i μ, ξ π g punctis, quæ jungantur rectis

ν per scho. 4. II.
ξ 5. XIII.
ο 8. I.
π 7. XIII.

secantibus

secantibus se mutuò in centris quadratorum ε, σ. *Secentur jam* oh, ok, εi, σg, *extrema & media ratione in punctis* φ, q, 3, 4, *ex quibus plana quadratorum ad partes cubi exteriores perpendiculares* φ2, qt, 37, 48 *æquales segmentis majoribus* φo, qo, 3ε, 4σ, *junganturque* tz, 2c, c7, 7d, dt, ta, a8, 8b, b2: *eodemq; modo ostendentur pentagona* t2c7d & t2b8a, *esse æquilatera & æquiangula & æqualia priori ob latera communia* td, ta. *Et sic habent tria pentagona tangentia cubi tria latera* ad, dc, ab, *sibiq; mutuò cohærentia lateribus communibus* td, ta.

Qua methodo alia novem sunt fabricanda pentagona similia tangentia reliqua novem cubi latera, & habebitur sphærâ comprehensum Dodecaedrum.

Iam intelligantur plana cubi opposita secari planis adef, & abcd, *per rectas planorum latera bifariam secantes* km & ln, gi & hk *ductis.*

ε 19. XI. *Hæc plana secantia cum sint recta ad plana cubi, utpote parallela basibus cubi, rectis ad plana* adef, abcd; ε, *erunt & sectiones eorum communes ad cubi plana rectæ.*

Ideoq;

Ideoq; cùm y p *sit recta ad planum* a d e f, *ipsa versus* z *producta erit communis sectio planorum per rectas* k m, l n *ductorum.*

Ita, si ex o *ad planum* a b c d *erigatur perpendicularis* g o z: *Erit ipsa communis sectio planorum per rectas* g i, h k, *ductorum. Sed quia dictæ omnes sectiones & diametri cubi se mutuò bisariam secant* σ: *Secent se in* z; *& bisariam sese diametri cubi secant* τ *in centro sphæræ cubum complectentis.* σ 39. XI. τ cor. 1. 15 XIII.

Erit igitur z *centrum sphæræ circa cubum descriptæ, & omnes lineæ* z, *ad omnes angulos cubi erunt æquales.*

Sed & ad omnes angulos Dodecaedri ex z *ductæ rectæ erunt ijsdem omnes æquales.*

Ducta enim z x : *quoniam parallelæ* β *sunt* k p, o z, *cùm utraque sit recta ad planum* a b c d:

Itemq; & o k, z p *tanquam rectæ ad planum* a d e f: *erit* p k o z (*quia duo* z *conjunctæ debent intelligi*) *parallelogrammum, &* p z μ *æqualis* k o, *vel* n p, *dimidio lateri cubi.*

Est autem p y, *ipsi* p r: *æqualis, tota ergò* z y, *toti* n r *æqualis erit.*

Quare

Quare cum quadrata nr, pr, *simul sint tripla quadrati* np, *quod* nr *in* p *media & extrema ratione est secta; erunt etiam quadrata* zy, py; *id est*, zy, xy. *simul tripla quadrati* ps, *quia* xy, *æqualis est ipsi* ps *vel* py. *Sed quadratis* zy, xy, λ *æquale est quadratum* zx: *Erit igitur & hoc triplum quadrati* zp, *id est, quadrati dimidij lateris cubi; cujus etiam triplum est quadratum semidiametri sphæræ cubum comprehendentis (ut* υ *enim diameter ad latus cubi: Ita*
υ 15. V. *semidiameter ad dimidium cubi. Ideoq;* φ *ut qua-*
φ 22. VI. *dratum diametri, ad quadratum lateris cubi, ita quadratum semidiametri ad quadratũ dimidij lateris. Cum ergò quadratum diametri sit triplum quadrati lateris; erit & semidiametri quadratum triplum quadrati dimidij lateris.) Erit itaq; quadratum* zx, *quadrato semidiametri sphæræ seu cubi æquale: Ipsaq;* zx, *æqualis semidiametro. Eidem semidiametro &* zu, *quia* zu *&* zx *rectangulorum æquilaterorum* zyx, *&* zyu *bases sunt, est* θ *æqualis: cumq; &* za, zd, *ad angulos cubi, semidiametro sphæræ sint æquales, ut antea dictũ, erunt jam ex centro* z, *ad 4. angulos pentagoni* a, d, u, x, *æquales semidiametro sphæræ. Sed quod eidem semidiametro æqualis etiam sit* zt, *ad angulum* t, *quintum, ita patet; si circa pentagonum æquilaterum illud describatur circulus* atdux, *in cujus planum ex* z *centro sphæræ demittatur perpendi-*

pendicularis ζω, *&* ω *connectatur cum* a, t, d, u, x *punctis. Quoniam quadratum* ζa *æquale est quadratis* z , ωa; *& quadratum* zx, *æquale quadratis* zω, ωx; *erunt, subtracto communi quadrato* zω, *ex quadratis æqualium rectarum* za, zx, *æqualia quadrata* ωa, ωx; *ipsæq; rectæ* ωa, ωx *æquales. Nec aliter rectæ* ωu, ωd, *& interse & ipsis* ωa, *&* ωx *æquales sunt, quia* zu, zd *sunt ostensæ æquales. Cum ergo ex* ω *plures duabus æquales cadant in peripheriam;*



x erit ω *centrum circuli. Ideoq;* ωt, *reliquis* χ 9. III.
ex centro æqualis erit, & quadrata zω, ωt, *æqualia quadratis* zω, ωa, *efficient æquales* zt, za. *Ex* z *igitur centro sphæra descripta cõplectens cubũ, comprehendit etiam pentagonum* atdux. *Eodemq; modo & omnia dodecaedri latera, adeoq; & sphæra eadem comprehenduntur cubus & dodecaedrum. Deniq; cum sit, ut* np *ad* ps; *ita* ps *ad* sn. υ *Erit quoq; ut* nl *dupla ipsius* np, *ad* rs *duplam ipsius* ps: *ita* rs *ad compositum ex* bn, rl, *seu duplam ipsius* sn. *Si igitur latus cubi* nl *secetur extrema & media ratione, majus segmentum erit* rs; *sed* nl *tota ita secta, est Rationalis, cum ipsius quadratũ quadrato diametri sphæræ Rationalis sit commensurabile, tanquam hujus pars tertia. Majus igitur segmentum* sr, *id est, latus dodecaedri* xu, *illi*

æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

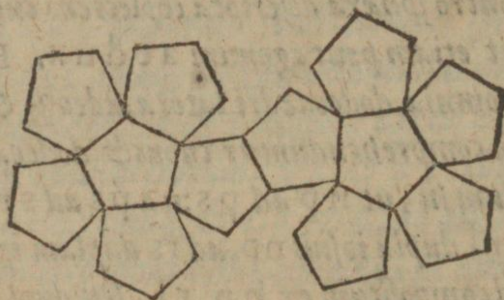
Corollarium.

Si latus cubi ſecetur extrema & media ratione, majus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti.

Recta enim l n, *æqualis lateri cubi, ſecta extrema & media ratione, majus ſegmentum habet* r s *latus dodecaedri.*

Scholium.

Si duodecim Pentagona hoc modo diſponantur æquiangula & æquilatera; componetur ex illis dodecaedrum ſecundum totam ſoliditatem.

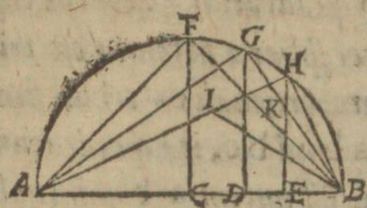


PROPOSITIO XVIII.

Problema 6.

Latera quinque figurarum exponere, & inter ſe comparare.

Diame-



Diameter a b *secetur bifariam in* c, *&* *abscindantur* b d, *pars tertia*, *&* b e *pars quinta diametri; superq;* a b *describatur semicirculus, & erigantur perpendiculares* c f, d g, e h; *connectanturq;* f g h, *cum* a *&* b. *Hinc ex* a h *abscindatur æqualis lateri decagoni* h i, *cujus semidiameter seu latus hexagoni est* b h: *& connectantur* b i. *Deniq;* b g *secetur media & extrema ratione in* k, *ut* b k *sit segmentum majus: erit* a g *latus pyramidis, vel Tetraedri*: a f *latus Octaedri*; b g *latus cubi*; b i *latus Icosaedri*, b k *latus Dodecaedri. Quia* α *enim* a g *est media proportionalis inter* b a, a d; β *erit, ut* b a *ad* a d *ita quadratum* a b *ad quadratum* a g. *Est autem* a b *ad* a d *sesquialtera: Igitur & quadratum* a b, *quadrati* a g *sesquialterum erit. Et* γ *sic* a g *est latus Tetraedri, cujus lateris est sesquialtera potentia diameter. Rursus* α *quoniam* a f *est media proportionalis inter* b a, a c; *erit rursum, ut* b a *ad* a c, *ita quadratum* b a, *ad quadratum* a f. *Est autem* b a *dupla ipsius* a c: *Igitur & quadratum* a b, *quadrati* a f. *Et* δ *sic* a f *est latus octaedri, quippe diameter est potentia dupla lateris octaedri. Deinde cum* b g α *sit media proportionalis inter* a b, b d; β *erit, ut* a b *ad* b d, *ita quadratum* a b *ad quadratum* b g. *Est autem* a b *tripla ipsius* b d:

α cor. 8. VI
β cor. 20 VI
γ 13. XIII.
δ 14. XIII.

 Ergò

ξ 15. XIII. *Ergò & quadratum* a b *quadrati* o g: *&* ι *sic* b g *latus cubi; quia diameter sphæræ potentia est tripla lateris cubi. Posteà proportionales* μ *etiam sunt* a b, b h, b e; β *estq; ut* a b *ad* b e, *ita quadratum* a b *ad quadratum* b h. *Est autem* a b *quintupla ipsius* b e: *Ergò & quadratum* a b *quadrati* b e. *Cum* ξ *ergò diameter sphæræ potentia sit quintupla*

ξ cor. 16. XIII. *semidiametri circuli quinq; latera Icosaedri ambientis, erit* b h *dicti circuli semidiameter, vel latus hexagoni. Est autem* h i *latus decagoni ejusdem*

π 47. I. *circuli. Ideoq;* b i *potens* π *latus hexagoni* b h *& decagoni* h i, *erit* ο *latus pentagoni ejusdem circuli.*

ο 18. XIII. *Et* κ *sic* b i *latus Icosaedri. Deniq; cum* b g *latus cu-*

κ 16. XIII. *bi sit extrema & media ratione sectum in* k, λ *erit*

λ cor. 17. XVI. b k *segmentum majus latus dodecaedri. Quinq; ergò figurarum regularium latera sunt exposita. Comparatio earundem sic habet: | Quoniam diameter sphæræ est potentia sesquialtera lateris pyramidis: & potentia dupla lateris octaedri; & potentia tripla lateris cubi; erunt partium talium quadrata laterum Tetraedri 4, Octaedri trium, Cubi duarum, qualium diameter est sex. Proindeq; latus Tetraedri ad latus Octaedri potentia sesquitertium est: Et ad latus Cubi potentia duplum. Latus autem Octaedri ad latus Cubi potentia sesquialterum. Harum ergo figurarum laterum quadrata & diametri sphæræ sunt inter se ut numerus ad numerum. Ideoq; sunt lineæ inter se*

commen-

u commensurabiles. Et propter diametrum Rationalem reliquae etiam rationales sunt, y Cumq; u 6. X.
non sint ut numerus quadratus ad quadratum, y corol. 25.
ξ nec erunt longitudine commensurabiles. Et sic VIII.
Rationales potentia solùm commensurabiles. At ξ 9. X.
verò latera Icosaedri & Dodecaedri, quoniam sunt lineae Irrationales, illud Minor, hoc Apotome, nec longitudine nec potentia productis sunt commensurabiles. Si enim essent lateribus tribus prioribus commensurabiles, quae diametro Rationali sunt commensurabilia, essent ipsae quoq; Rationales quod absurdum, quia sunt Irrationales. Sed nec inter se sunt commensurabilia latera Icosaedri & Dodecaedri. Si enim longitudine inter se essent commensurabilia, o Essent utraq; ejusdem speciei
vel Minores vel Apotomae. Si autem solùm potentia, o 104. X.
π eodem modo latus dodecaedri erit Minor; quia
Icosaedri latus est Minor ρ. Quod σ absurdum, π 106. X.
quia nullae Irrationales specie differentes, eaedem ρ 16. XIII.
sunt. Quanquam itaq; trium priorum quidem σ 102. X.
figurarum latera tum inter se, tum ipsi diametro sphaerae sunt commensurabilia & Rationalia: duo verò posteriora iisdem & diametro & inter se incommensurabilia & Irrationalia: Inter eas tamen figuras occurrit hic ordo, ut eodem ordine se excedant earum latera, quo ipsas construximus. Quanquam eum ordinem in definitionibus, non observavit Euclides. Majus τ enim est latus Tetraedri a g, latere Octaedri a f: quia majorem sub-

 tendit

tendit arcum: Et hoc majus τ latere cubi b g. cubi autem latus majus esse latere Icosaedri ita patet.
τ 28. III.
Quoniam a b ponitur tripla ipsius b d, υ erit propter duplicatam quadratorum rationem quadratum a b, nuncuplum quadrati b d; quia nuncupla est duplicata triplæ. Propterea, qualium partium quadratum est novem, talium unum habet b d. Earundem autem est quadratum b g trium, quod illud hujus sit φ triplum. Erunt igitur quadrata g d & d b, etiam talium trium: sublatoq; quadrato b d, unius; erit d g talium duarum. Sed quia quadratum a b est quintuplum quadrati b h, χ erit hoc minus quam talium 2; quia 9 ad 2 minorem quintupla habent proportionem. Ideoq; quadratum g d majus est quadrato b h, & g b major quam b h. Rursus quia diameter sphæræ ψ componitur ex b h semi diametro circuli, ex quo Icosaedrum constituitur, & duplo decagoni h i: Erit latus decagoni h i minus tertia parte b d diametri a b. Si enim credatur æqualis ipsi b d, tum duplum decagoni esset æquale ipsi a d, & h b ipsi d b. Ideoq; quadratum a b nuncuplum quadrati b d, erit etiam nuncuplum quadrati b h, cujus modo erat quintuplũ. Non ergo est h i tertia pars ipsius a b. Sed neq; major. Si n. ducatur major tertia parte b d erit etiã ipsius dupla major dupla partis tertiæ a d. Et sic b h erit minor parte tertia a d. Adeoq; quadratum a b, majus quam nuncuplum quadrati b d; quod magis est absurdum. Cùm

υ 20. VI.

φ 15. XIII.

χ 10. V.

ψ corol. 2. 16. XIII.

ergò

ergò h i nec æqualis sit nec major tertia parte, erit necessariò minor. Itaq; cum g d, d b sint majores rectis b h, h i, ut ostensum est: erunt etiam ipsarum quadrata majora, harum quadratis, sed quadratū rectæ b g est ɲ æquale quadratis g d, d b; & quadratum b i æquale quadratis b h, h i: Ergò quadratū b g majus erit quadrato b i; latus cubi latere Icosaedri. Deniq; Icosaedri latus b i majus est latere Dodecaedri b k, quod est segmentū majus lineæ b g extrema & media ratione sectæ. Est enim rectangulum sub b g, b k majus rectangulo sub b g, k g adeoq; rectangula sub b g, b k & sub b g, g k simul, id est, ω quadratum b g, majora sunt duplo rectanguli sub b g, g k, id est, A quadrato b k bis. (quia b g, b k, g k sunt proportionales, & quadratum b k, æquale est rectangulo sub b g, g k.) Idcirco majora erunt tria quadrata rectæ b g, sex quadratis rectæ b k; sed tribus quadratis b g æqualia sunt 5. Quadrata b h. (quia quadratum a b tam est triplum quadrati g b, quam quintuplum quadrati b h) unumq; quadratum b g majus erit uno quadrato b h. (si enim esset æquale quadratum b h, quadrato b k, vel minus; 5 quadrata b h essent minora sex quadratis b k, quibus tamen majora sunt ostensa.) Et recta b h major, quàm recta b k: cumq; b i major sit quàm b h; erit etiam major quàm b k, latus Icosaedri latere Dodecaedri. Exposita itaq; sunt latera quinq; figurarum & inter se comparata. Quod erat faciendum.

ω 2. I.
A 17. VI.

FINIS.

Correctiones Erratorum extantiorum.

Pag.	Lin.	Errata	Correctiones.
4	5	nea	linea
16	23	ada	a d c
23	11	ex	&
	12	a b c	totus a b c
27	12	p f	d f
40	12	idemq; e c b	deniq; e b
42	15	punt	fiunt
	18	fila a c	pla a e
45	8	ad b g	a vel b g
59	in marg.	g. 47. I.	γ 2. ax.
69	penult.	in marg. omiſ.	α. 12. III.
113	17	& g	h g
137	19	prout	praxis
164	7	ante o q omiſ.	am, quod deficit parallelogrammo.
165	9	inverſa	inventa
218	penult.	denominatas	denominantur,
227	15	Ergò f non ex	deleantur
277	14	per	qui
333	9	numoro	modo
338	in marg.	§ 33 XI.	33. III.
362	25	quartus	in 49
364	ult.	habeatur	habeatve
415	11	e f	ex
428	19	faciunt	facienti
443	penult.	a h ad h e	ad h g
469	6	a e	b c
470	9	b d, a g	b g, ad
497	13	erunt & if	& c d & i f
506	in marg. omiſ.		α 33. XI.



